

К. І. КОЦЮБІВСЬКА, Ю. А. БУРЄННІКОВ, І. О. СИВАК

# РЕСУРС ПЛАСТИЧНОСТІ МЕТАЛІВ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ВИДАВЛЮВАННІ З ПРОТИТІСКОМ



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Вінницький національний технічний університет

**К. І. Коцюбівська, Ю. А. Бурсніков, І. О. Сивак**

**РЕСУРС ПЛАСТИЧНОСТІ МЕТАЛІВ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ  
ВИДАВЛЮВАННІ З ПРОТИТИСКОМ**

**Монографія**

ВНТУ  
2011

УДК 621.983.5

ББК 34.54

К76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 24.12.2009 р.)

Рецензенти:

**В. А. Огородніков**, доктор технічних наук, професор

**О. В. Нахайчук**, доктор технічних наук, професор

**Коцюбівська К. І.,**

К76      Ресурс пластичності металів при поперечному видавлюванні з протитиском : монографія / К. І. Коцюбівська, Ю. А. Буренніков, І. О. Сивак. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 156 с.

ISBN 978-966-641-417-8

В монографії розглянуто сучасні методи визначення граничних деформацій при холодній пластичній деформації металів методами прикладної теорії деформуємості. Для збільшення пластичності металів запропоновано використовувати протитиск, який створюється твердим середовищем. Розроблено метод оцінки використаного ресурсу пластичності при пластичному деформуванні в умовах об'ємного напруженого стану.

Монографія призначена для інженерно-технічних працівників, науковців та студентів.

**УДК 621.983.5**

**ББК 34.54**

**ISBN 978-966-641-417-8**

© К. Коцюбівська, Ю. Буренніков, І. Сивак, 2011

## Зміст

ВСТУП.....	5
1. ДЕФОРМАЦІЇ І НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПЛАСТИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ МЕТАЛІВ.....	6
1.1. Методи дослідження деформованого стану при великих пластичних деформаціях.....	6
1.2. Апроксимація експериментальних даних кубічними сплайн-функціями.....	9
1.3. Визначення напружено-деформованого стану при обробці металів тиском.....	17
2. ЗАЛЕЖНІСТЬ ПЛАСТИЧНОСТІ МЕТАЛІВ ВІД ІСТОРІЇ НАВАНТАЖЕННЯ.....	23
2.1. Накопичення пошкоджень при пластичній деформації. Критерії деформуємості.....	23
2.2. Залежність пластичності металів від схеми напруженого стану при об'ємному напруженому стані.....	28
2.3. Поверхня граничних деформацій.....	31
2.4. Залежність пластичності від схеми напруженого стану при плоскому напруженому стані.....	38
2.5. Вплив третього інваріанта тензора напружень на пластичність металів.....	41
3. ОЦІНКА ДЕФОРМУЄМОСТІ ЗАГОТОВОК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ВИДАВЛЮВАННІ.....	46
3.1. Поперечне видавлювання стержневих заготовок з протитиском.....	47
3.2. Визначення напружено-деформованого стану при поперечному видавлюванні суцільних заготовок.....	53
3.3. Визначення величини протитиску.....	65
3.4. Оцінка деформуємості при поперечному видавлюванні суцільних осесиметричних заготовок.....	71

3.5. Розв'язок задачі поперечного видавлювання з використанням методу скінченних елементів.....	81
3.6. Напружено-деформований стан та деформуємість заготовок при поперечному видавлюванні з протитиском.....	89
<b>4. ДЕФОРМУЄМІСТЬ ТРУБЧАСТИХ ЗАГОТОВОК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ВИДАВЛЮВАННІ З ПРОТИТИСКОМ.....</b>	<b>98</b>
4.1. Поперечне видавлювання трубчастої заготовки з протитиском.....	98
4.2. Напружено-деформований стан при поперечному видавлюванні трубчастих заготовок з використанням протитиску.....	101
4.3. Оцінка деформуємісті трубчастих заготовок при поперечному видавлюванні з протитиском.....	105
4.4. Визначення напружено-деформованого стану методом скінченних елементів та оцінка деформуємісті заготовок.....	111
4.5. Експериментальні дослідження формотворення деталей з фланцем при холодному поперечному видавлюванні з протитиском.....	120
4.6. Вплив проміжних відпалів на відновлення ресурсу пластичності при поперечному видавлюванні.....	127
4.7. Методика проектування процесів поперечного видавлювання з протитиском.....	131
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>134</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>136</b>

## ВСТУП

Розвиток сучасних технологій обробки металів тиском характеризується все більш глибоким та всебічним вивченням процесів зміцнення і пластичного розрихлення, які мають місце при пластичній деформації металів. Так як процес пластичного формозмінення необоротний, то фізико-механічні властивості zdeформованого металу в значній мірі залежать від історії навантаження. Сучасний рівень теорії пластичності дозволяє оцінити вплив параметрів процесу пластичного формозмінення на історію навантаження та обумовлену нею інтенсивність процесів накопичення деформаційних дефектів і, на цій основі, розробляти нові та удосконалювати відомі технології обробки металів тиском. Крім того, використовуючи методи теорії пластичності та прикладної теорії деформуємі, можна визначити такі параметри технологічного процесу і закони їх зміни, при яких буде забезпечена необхідна технологічна спадковість деталей, отриманих методами пластичного деформування.

Для оцінки впливу параметрів процесу обробки тиском на ймовірність руйнування та технологічну спадковість необхідно мати інформацію про напружено-деформований стан в металі, що деформується. В даний час теоретичними методами така задача розв'язана тільки для простих випадків навантаження. Тому в монографії розглядаються інженерні, експериментально-розрахункові та чисельні методи визначення напружено-деформованого стану в пластичній області. Для оцінки ймовірності появи макротріщин, обумовлених деформаційними дефектами, величину використаного ресурсу пластичності визначали методами прикладної теорії деформуємі.

В монографії використані матеріали досліджень та розробок, виконаних авторами сумісно з І. С. Алієвим, В. М. Михалевичем, В. А. Огородніковим та Н. А. Шестаковим.

Автори вдячні їм за співробітництво.

# 1. ДЕФОРМАЦІЇ І НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПЛАСТИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ МЕТАЛІВ

## 1.1. Методи дослідження деформованого стану при великих пластичних деформаціях

Розв'язок технологічних задач обробки металів тиском базується в основному на теорії пластичності. Однак, використання теоретичних методів дослідження напружено-деформованого стану обмежене недостатнім рівнем обґрунтування вибору тих чи інших реологічних моделей, а також граничних умов. Хоча в роботі [1] відмічається, що при використанні класичних варіаційних методів в даний час можна «розв'язати будь-яку крайову задачу теорії обробки металів тиском з будь-якою (розумною) точністю», але проблема вибору та побудови відповідних координатних функцій залишається невирішеною. Крім того, при наближеному розв'язку задач обробки тиском варіаційним методом не завжди вдається задовольнити умовам повноти та апроксимаційної універсальності [2]. Відкритим залишається питання вибору граничних умов. Граничні умови в формі законів Прандтля або Кулона, а також більш складні моделі [3] мають або наближений, або частковий характер. Тому в обробці металів тиском залишається значною роль експериментальних та експериментально-розрахункових методів досліджень.

Для підвищення ефективності процесів обробки металів тиском необхідний подальший розвиток методів розв'язку крайових задач прикладної теорії пластичності та теорії деформуємі. Важливий внесок у розвиток технологічної механіки та теорії деформуємі зробили І. С. Алієв, Ю. А. Алюшин, Я. Є. Бейгельзімер, В. І. Дорошко, С. І. Губкін, Г. Я. Гун, В. М. Данченко, Г. Д. Дель, А. М. Дмітрієв, В. О. Євстратов, Є. В. Звонарьов, В. Л. Калюжний, А. А. Костава, В. Л. Колмогоров, Ю. Г. Калпін, О. М. Лаптев, Н. Н. Малінін, Є. М. Макушок, В. М. Михалевич, А. А. Нотич, А. Г. Овчінніков, В. А. Огородніков, Є. О. Попов, А. А. Поздєєв, І. П. Рене, О. А. Розенберг, В. Д. Рудь, В. В. Скороход, Г. А. Смірнов-Аляєв, В. І. Стеблюк, Л. Г. Степанський, Д. В. Хван, Є. П. Унков,

Ю. К. Філіпов, Н. А. Шестаков, М. Б. Штерн, С. П. Яковлев, Р. Дж. Грін, У. Джонсон та інші.

При обробці металів тиском експериментальним шляхом можна визначити переміщення, деформації, інколи швидкості течії і деякі функції напружень. Жоден з існуючих методів не дозволяє безпосередньо заміряти напруження в довільних точках тіла, що деформується. Вдається тільки наближено виміряти напруження на контактній поверхні [4–7] або в окремих точках деформуємого тіла [6] за допомогою спеціальних датчиків. Однак, отримана таким способом інформація має якісний характер [8], що пов'язано із значними похибками вимірювальних пристроїв та усередненням інформації в межах зони контакту матеріалу з вимірювальним пристроєм. Однак, жоден із експериментальних методів не дозволяє отримати прямою обробкою експериментальних даних всі характеристики напружено-деформованого стану. Повний аналіз напружено-деформованого стану передбачає використання експериментально-розрахункових та чисельних методів, які базуються на певних фізико-механічних теоріях пластичної деформації металів.

Найбільше поширення при дослідженнях напружено-деформованого стану отримали методи, в яких використовують визначену експериментально кінематику. Якщо параметри кінематики (переміщення, швидкості течії) відомі, то можна розрахувати компоненти деформації та швидкості і потім, використовуючи теорію пластичної течії та граничні умови, визначити компоненти тензора напружень.

Найбільш поширеним і найстарішим є метод координатних сіток, який використовується для дослідження деформацій як на поверхні, так і у внутрішніх областях зразків. Співвідношення для розрахунків деформацій по zdeформованим координатним сіткам вперше отримані Е. Зібелем і П. О. Пашковим [9]. Рівняння отримані з умови, що вихідна квадратна комірка сітки, нанесеної на головну площину, після деформації перетворюється в паралелограм, а вписане в вихідний квадрат коло – в еліпс. Відповідно до теорії кінцевих деформацій, головні осі еліпса співпадають з напрямками головних осей деформацій, а у відповідності з деформаційною теорією – і з головними осями напру-



жень. І. П. Рене [9] отримав більш загальні формули для випадку, коли вихідна комірка має форму паралелограма, що дуже важливо при поетапному дослідженні процесів пластичного формозмінення. Розглянуті методики є універсальними, вони придатні для досліджень будь-яких матеріалів і довільних умов деформації, мають високу локальність (в плані слабкого впливу похибок в деякій зоні області на результати розрахунків у віддаленій зоні). До недоліків слід віднести високу трудомісткість вимірювань, низьку точність визначення малих деформацій. Отримані результати є усередненими в межах комірки, що дозволяє оцінювати напруження тільки по деформаційній теорії. Крім того, розглянуті методики дають великі похибки, якщо сторони комірки в процесі деформації сильно викривляються.

Тому перспективними і більш точними є методи, в яких процес деформації розбивають на кілька етапів і на кожному із них заміряють координати вузлів ділильної сітки [10]. Потім визначають переміщення вузлів як функції часу і використовують отриману інформацію для визначення поля швидкостей деформацій. Перехід до напруженого стану здійснюється по співвідношеннях теорії течії.

Експериментальна інформація про координати вузлів ділильної сітки має систематичні похибки, пов'язані із особливостями методу вимірювання. Тому математична обробка експериментальних результатів шляхом згладжування повинна відділити випадкові та систематичні похибки від досліджуваної залежності. Операція згладжування нерозривно зв'язана з апроксимацією і може бути виконана для всієї області і локально. В першому випадку вибір апроксимуючих функцій викликає відомі труднощі, оскільки ці функції не можуть бути довільними. Крім хорошої збіжності до апроксимуємих об'єктів, необхідно задовольнити початковим та граничним умовам, відомим із теоретичного аналізу. Врахування граничних умов дозволяє підвищити достовірність апроксимації і обчислення похідних. Врахувати обмеження, які накладаються на апроксимуючі функції, можна шляхом спеціального підбору таких функцій [11]. Вибір функцій досить складна задача, яка ґрунтується на аналізі численних експериментальних даних та технологічних особливостях процесу. Тому результати апроксимації, в більшості випадків, використовуються для того процесу,

на основі аналізу якого вона була отримана. Такий підхід можна вважати ефективним при дослідженні конкретних процесів, так як він дозволяє отримувати результати в аналітичному вигляді і в деяких випадках зменшити об'єм необхідної експериментальної інформації.

Велику універсальність мають алгоритми, в яких експериментальна інформація апроксимується універсальними методами: степеневими багаточленами, рядами Фур'є, сплайнами і т.п. Для пластичних деформацій, де область розрахунків може включати кінцеве число жорстких і пластичних зон, а також для областей із значною локалізацією деформацій, приходиться використовувати апроксимацію високого порядку, яка включає 8–12 членів ряду [12, 13]. Хоча при цьому досягається хороше наближення до функції, що згладжується, обчислення похідних виявляється незадовільним, так як апроксимуюча функція в області розрахунку має деяке число екстремумів, які не пов'язані з особливостями вимірюваних величин. Сплайн-функції [14] вільні від більшості недоліків поліноміальної апроксимації і дозволяють легко забезпечити виконання граничних умов [15–18]. При використанні сплайн-згладжування виникає багато труднощів при побудові багатомірного сплайну, так як такі сплайни важко будувати для областей із складною конфігурацією границь [19–22].

## **1.2. Апроксимація експериментальних даних кубічними сплайн-функціями**

При дослідженні нестационарних процесів пластичної деформації методами координатних сіток значно зростає трудомісткість експериментів і, як наслідок, трудомісткість їх обробки. Це пов'язано з тим, що напружено-деформований стан у даному випадку є функцією не тільки координат, але і часу. Тому процес деформування розбивають на ряд етапів, на кожному з яких експеримент переривають, заготовку витягують із пристрою і заміряють координати вузлів деформованої сітки, нанесеної на меридіональний або інші перерізи заготовки. Наприклад, при осесиметричній деформації експериментальні дані представляють у вигляді таблично заданих функцій (масивів) поточних (ейлерових) координат  $z$ ,  $r$  від початкових (лагранжевих) координат

$z_0, r_0$  і часу (номера етапу деформування). Потім заготовку вставляють у пристрій і деформують до наступного етапу.

Компоненти тензора швидкостей деформацій при осесиметричній деформації визначають по спотворенню координатної сітки, нанесеної на меридіональний переріз заготовки по формулах [15, 17]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{r}{r_0} \left[ \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial t} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} \right], & \dot{\epsilon}_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t} \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{r}{r_0} \left[ \frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} \right], & (1.1) \\ \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{r}{r_0} \left[ \frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} + \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial t} \right]. \end{aligned}$$

Функції ейлерових координат від лагранжевих  $z(z_0; r_0; t)$  і  $r(z_0; r_0; t)$  можна отримати шляхом апроксимації експериментальних даних кубічними сплайнами. Експериментальна інформація завжди містить систематичні похибки, обумовлені методом вимірювання і випадкові похибки, викликані випадковим розсіюванням величин, що вимірюються. Математична обробка повинна відокремлювати випадкові похибки від досліджуваної залежності. При цьому виходять з того, що досліджувана функція є неперервною і диференційованою, а випадкові похибки такою властивістю не володіють. Крім вимог точного наближення до об'єктів, які апроксимуються, необхідно забезпечити виконання граничних умов, відомих з теоретичного аналізу процесу (це умови на осі симетрії, на границі пружної і пластичної зон і т.д.). Програмний комплекс з побудови згладжуючих кубічних сплайнів та їх застосування для знаходження кінематики осесиметричної задачі було розроблено в роботах [23, 24, 145, 146]. Інформацію про вихідну і спотворену координатну сітку одержують шляхом її сканування й обробки сканованого зображення ділильної сітки за допомогою розробленого програмного модуля, що дозволяє створити базу даних координат вузлових точок сітки.

Розроблений метод, дозволив підвищити точність вимірювань координат вузлів деформованої ділильної сітки і значно зменшити трудомісткість процесу вимірювання [23, 24, 145, 146]. Функції ейлерових координат від лагранжевих  $z(z_0; r_0; t)$  і  $r(z_0; r_0; t)$  можуть бути

отримані апроксимацією експериментальних значень  $r_{i,j}(t)$  і  $z_{i,j}(t)$  виміряних у вузлах сітки  $i, j$ . Однак, розв'язок задачі багатомірного згладжуючого сплайну пов'язаний з цілим рядом труднощів, основними з яких є побудова розв'язків для задач зі складною конфігурацією границі. Виходячи з цього спочатку кубічними сплайнами апроксимували залежності  $z(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$ ,  $r(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$  і ін., що легко диференціюються і які надалі легко використовувати для визначення компонент тензора швидкостей деформацій, а для розв'язку поставленої задачі використані згладжуючі кубічні сплайни одного аргументу [14]

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^3 a_j^i (x - x_i)^j, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=1, 2, \dots, n-1 \dots \quad (1.2)$$

Критерієм якості апроксимації в цьому випадку є функціонал [14]

$$I(f) = \int_{x_1}^{x_n} |S''(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} (f_i - S(x_i))^2, \quad (1.3)$$

де  $f_i$  – значення функції, що згладжується, у вузлі,  $\rho_i \geq 0$  – вагові коефіцієнти,  $[x_1, x_n]$  – область визначення функції  $f(x)$ .

Задача згладжування формулюється у вигляді мінімізації функціонала (1.3). Структура функціонала (1.3) забезпечує компроміс між вимогами мінімальної кривизни сплайну  $S(x)$  і, одночасно, найменшого відхилення сплайну від заданих експериментальних значень. В більшості випадків ці вимоги є суперечливими, тобто наближення кривої до експериментальних точок збільшує кривизну і навпаки. Необхідне співвідношення між цими вимогами забезпечується вибором вагових коефіцієнтів.

Знаходження коефіцієнтів  $a_j^i$  зводиться до розв'язку системи рівнянь з п'ятидіагональною матрицею. Для одержання замкнутої системи рівнянь необхідно задати граничні умови. Застосування сплайн-функцій у задачах обробки металів тиском зручно внаслідок того, що граничні умови часто відомі з постановки задачі.

Наприклад, в осесиметричних задачах на осі симетрії заготовки виконуються умови:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial r_0^2} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r_0} = 0. \quad (1.4)$$

Це дозволяє точно задавати граничні умови, що значно підвищує точність обчислень.

Програма обчислення сплайну (1.2) дозволяє легко виконати ряд операцій над таблично заданими функціями. У програму включена процедура обчислення значень сплайн-функції і її першої і другої похідних у довільній точці області визначення, а також процедура побудови графіка сплайну. Вибір вагових коефіцієнтів  $\rho_i$  виконаний за методикою [14]. Тому розроблена процедура, що реалізує ітераційний процес вибору вагових коефіцієнтів. Вагові коефіцієнти вибираються так, щоб забезпечити найбільшу гладкість сплайну і задовольнити умові

$$|f_i - S(x_i)| \leq \delta_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (1.5)$$

де  $\delta_i$  – абсолютна похибка експериментального значення функції  $f_i$  (похибка вимірювань координат точки  $(r_{ij}; z_{ij})$ ).

Ітераційний процес продовжується доти, поки не буде виконано умову (1.5) для усіх вузлів сплайну.

Інформацію про вихідну і спотворену координатну сітку одержували шляхом її сканування. Обробка сканованого зображення ділильної сітки на будь-якій стадії деформування за допомогою розробленого в [23,24] програмного модуля дозволяє створити базу даних координат вузлових точок сітки. Отримані дані записуються в робочих листах файлу Microsoft Excel і використовуються для подальшої апроксимації. Такий спосіб дозволяє значно зменшити похибку вимірювань координат вузлів координатної сітки  $\delta_i$ .

У робочому вікні розробленої програми відкривають файл зображення формату \*.bmp (рис. 1.1). Натискаючи лівою клавішею мишки на зображенні, вибираються точки ділильної сітки, координати яких необхідно визначити. Порядок задання координат вузлів повинен відповідати інформації приведеній в таблиці експериментальних даних. Отримані координати заносяться у файл електронної таблиці Excel (рис. 1.2).

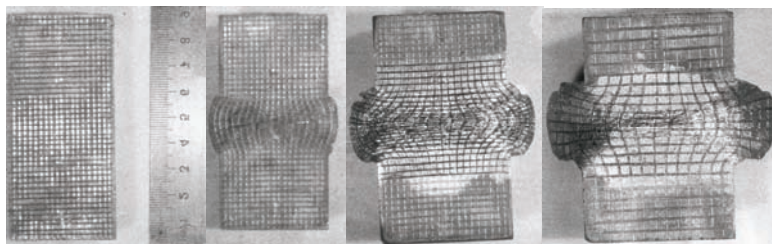


Рис. 1.1. Етапи поперечного видавлювання заготовки

A1	dwl_stage									
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	dwl_stage	dwl_row	dwl_col	dwl_x	dwl_y	dwl_koef_x	dwl_koef_y	dwl_x0	dwl_y0	
2	0	1	1	602	194	11	21			
3	0	2	2	520	242	11	21			
4	0	3	3	545	302	11	21			
5	0	4	4	663	362	11	21			
6	0	5	5	584	446	11	21			
7	0	6	6	697	522	11	21			
8	0	7	7	604	640	11	21			
9	0	8	8	611	730	11	21			
10	0	9	9	616	838	11	21			
11	0	10	10	616	930	11	21			
12	0	11	11	602	1018	11	21			
13	0	12	12	579	1088	11	21			
14	0	13	13	561	1136	11	21			
15	0	14	14	540	1180	11	21			
16	0	15	15	538	1232	11	21			
17	0	16	16	536	1276	11	21			
18	0	17	17	531	1314	11	21			
19	0	18	18	531	1364	11	21			
20	0	19	19	524	1386	11	21			
21	0	20	20	526	1440	11	21			

Рис. 1.2. Файл MS Excel, у якому зберігаються значення координат вузлових точок

При апроксимації отриманих експериментальних даних задаються граничні умови подібні (1.4), а там де граничні умови не відомі можна прийняти  $S''(0) = 0$ ,  $S''(n) = 0$ . Використовуючи експериментальні дані, можна обчислити значення других похідних функції у вузлах апроксимації за методикою [14], що дозволяє обчислити значення сплайн-функцій у вузлових точках сітки.

Розглянемо в розгорнутому вигляді системи рівнянь, які необхідно розв'язувати при побудові згладжуючого сплайну. У неперіодичному випадку вони мають п'ятидіагональну структуру [14, 23, 24]

$$\begin{aligned}
a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 &= g_0, \\
b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 &= g_1, \\
c_{i-2} M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} + c_i M_{i+2} &= g_i, \quad i = 2, \dots, N-2, \\
c_{N-3} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N &= g_{N-1}, \\
c_{N-2} M_{N-2} + b_{N-1} M_{N-1} + a_N M_N &= g_N.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Коефіцієнти цієї системи визначаються формулами

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{h_{i-1}^2} \rho_{i-1} + \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right)^2 \rho_i + \frac{1}{h_i^2} \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
b_i &= \frac{1}{6} h_i - \frac{1}{h_i} \left[ \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \rho_i + \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \rho_{i+1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \\
c_i &= \frac{1}{h_i h_{i+1}} \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-3, \\
g_i &= \frac{z_{i+1}^0 - z_i^0}{h_i} - \frac{z_i^0 - z_{i-1}^0}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Якщо згладжуючий сплайн задовольняє умовам  $S^{(l)}(0) = S^{(l)}(n) = 0$ , то

$$a_0 = a_N = 1, \quad b_0 = c_0 = c_{N-2} = b_{N-1} = g_0 = g_N = 0. \tag{1.8}$$

Для розв'язку системи (1.6) використано алгоритм розв'язку систем рівнянь з п'ятидіагональними матрицями, заснований на розкладанні матриць системи у вигляді  $LWL^T$ , де  $L$  – нижня трикутна матриця з одиничною діагоналлю, а  $W$  – діагональна матриця з позитивними елементами [14, 23, 24].

Після обчислення  $M_i$  із системи (1.6) значення сплайну  $z_i$  визначаються співвідношенням:

$$z_i - z_i^0 = \rho_i D_i, \quad i = 0, \dots, N, \tag{1.9}$$

причому

$$D_0 = \frac{1}{h}(M_1 - M_0),$$

$$D_i = \frac{1}{h_i}(M_{i+1} - M_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(M_i - M_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (1.10)$$

$$D_N = \frac{-1}{h_{N-1}}(M_N - M_{N-1}).$$

Найбільш важливою задачею при побудові згладжуючого сплайну є вибір вагових коефіцієнтів  $\rho_i$ . Відмітимо, що якщо  $\rho_i = 0$ , то згладжуючий сплайн перетворюється в інтерполяційний. Звідси випливає, що чим точніше задано експериментальні значення координат  $z_i^0$  у вузлах сітки, тим меншими повинні бути вагові множники  $\rho_i$ . У практичних задачах звичайно відомі помилки у визначенні величин  $z_i^0$ , тобто  $|z_i^0 - z_i| \leq \delta_i$ , де  $z_i$  – значення сплайну. У цій ситуації природно побажати, щоб згладжуючий сплайн  $S(x)$  задовольняв умові (1.5), яку перепишемо у вигляді:

$$|z_i^0 - z_i| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (1.11)$$

$$\text{або} \quad \rho_i |D_i| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N... \quad (1.12)$$

Ці обмеження використовуються для обчислення вагових множників  $\rho_i$ . В роботах [23, 24] побудований ітераційний процес, реалізація якого дозволила одержати невідомі  $M_i$  і множники  $\rho_i$ :

$$(A + 6HR^{(k)}H^T)M^{(k)} = 6Hz^0, \quad (1.13)$$

$$\rho_i^{(k+1)} = \begin{cases} \delta_i / |D_i^k|, & \text{если } D_i^k \neq 0, \\ 0, & \text{если } D_i^k = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

де  $k$  – номер ітерації.

Матриці  $A$  і  $H$  мають наступний вигляд



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & r_1 & h_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & h_1 & r_2 & h_2 & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & h_{N-3} & r_{N-2} & h_{N-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & h_{N-2} & r_{N-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ h_0^{-1} & -(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & h_{N-2}^{-1} & -(h_{N-2}^{-1} + h_{N-1}^{-1}) & h_{N-1}^{-1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$$R = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \rho_N \end{bmatrix}$$

Зв'язок між  $M_i$  і  $z_i$  визначається матричним рівнянням

$$AM = 6Hz. \quad (1.17)$$

Як початкове наближення приймали  $\rho_i^0 = 0$ , що відповідає інтерполяційному сплайну зі значеннями  $D_i = D_i^0$ . Ітераційний процес продовжується доти, поки значення сплайну  $z_i$  у вузлах сітки не виявляться в «коридорі», який визначається співвідношенням (1.11).

У роботах [23, 24] оптимальні значення сплайну  $z_i$  у вузлах сітки були отримані при значеннях вагових коефіцієнтів, що відповідають похибкам вимірювань  $\delta_i \leq 0,01$ .

Розроблений програмний модуль використано для апроксимації експериментальних залежностей  $r$  від  $r_0$  при  $z = \text{const}$  для процесу поперечного видавлювання. Частина отриманих згладжуючих кривих приведена на рис. 1.3. Програма згладжування експериментальних даних за допомогою сплайн-функцій [23, 24] дозволяє по сканованому

зображенню координатної сітки визначати координати точок, згладжувати отримані експериментальні дані і розраховувати компоненти тензора швидкостей деформацій.

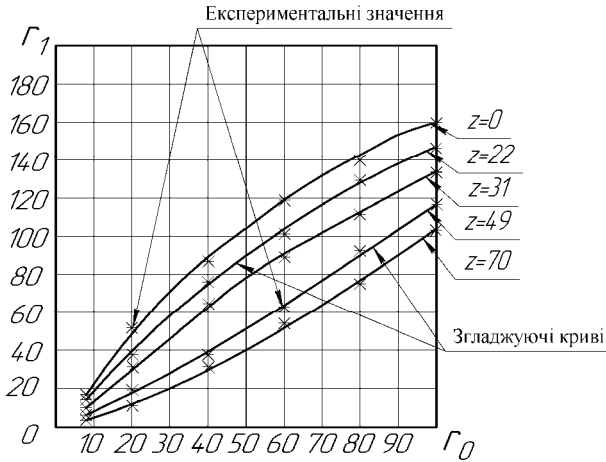


Рис. 1.3. Графіки сплайн-функцій отримані при значеннях вагових коефіцієнтів, що відповідають похибкам вимірів  $\delta_i \leq 0,01$

### 1.3. Визначення напружено-деформованого стану при обробці металів тиском

Визначення полів напружень і деформацій при обробці металів тиском можуть проводитись як на основі розв'язку повної системи рівнянь прикладної теорії пластичності, так і за допомогою експериментально-розрахункових методів.

Задача дослідження напружено-деформованого стану (НДС) в пластично деформованих тілах формується, як задача розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Однак не кожену задачу ОМТ можна сформулювати в вигляді математичної задачі теорії пластичності, оскільки складність фізичних залежностей і одночасний вплив множини факторів на процес пластичного формозмінення створюють багато труднощів в виборі розрахункової схеми і, крім того, не кожену сформульовану математичну задачу вдається розв'язати відомими методами із достатньою точністю.

Одним із перших був розроблений інженерний метод розрахунків НДС в процесах ОМТ, який заснований на сумісному розв'язку рівнянь рівноваги і пластичності [25–29]. Великий внесок в розвиток цього методу зробили Е. Зібель, Т. Карман, Г. Закс, С. І. Губкін, А. І. Целіков, С. П. Унксов, М. В. Сторожев, Е. О. Попов та ін. В цьому методі не розглядають кінематику процесу, а обмежуються аналізом тільки силових параметрів. За рахунок припущень відносно характеру розподілу напружень (гіпотези плоских перерізів, радіальної течії Хаара – Кармана та ін.) задача зводиться до статично визначеної і вдається отримати розв'язок в вигляді співвідношень, які описують вплив основних факторів на процес деформування. Цей метод допоміг виконати наукове обґрунтування технологічних процесів та їх удосконалення, але виявився практично непридатним для розв'язку задач теорії деформуємі, в зв'язку з тим, що характеристики, які отримували після розрахунків даним методом часто навіть якісно не співпадають з величинами, отриманими більш точними теоретичними та експериментальними методами [26].

Метод ліній ковзання також можна віднести до традиційних методів розв'язку задач теорії пластичності. Розробці та розвитку цього методу присвячені роботи Р. Хілла [30], В. В. Соколовського [31], С. А. Хрiстіановича [32], У. Джонсона [26], А. Д. Томльонова [33], І. П. Ренне [9], Є. М. Макушка [34] та ін. Цим методом можна розв'язувати задачі, в яких рівняння рівноваги і пластичності створюють замкнену систему диференційних рівнянь гіперболічного типу. Тому цей метод можна використовувати при розв'язку плоских задач і, тільки в окремих випадках, для розв'язку осесиметричних задач [25, 29, 35]. Розв'язки які можуть бути отримані безпосередньо із знання якої-небудь області ліній ковзання, називаються прямими. Коли інформації про форму початкових ліній ковзання недостатньо, то використовують непрямі (обернені та напівобернені) методи [27, 36]. Задача розв'язується методом спроб і помилок або матрично-операторним методом [27]. Цим методом виконано аналіз великої кількості процесів обробки тиском. Однак труднощі які виникають при врахуванні складної реології металу, температурних полів, а також обмеження використання методу для розв'язку осесиметричних та об'ємних за-

дач, привели до необхідності розвитку інших методів, які мають більшу універсальність, хоча також не завжди є точними.

В 60-ті роки минулого століття почав розвиватись метод аналізу процесів обробки металів тиском, заснований на принципі рівності робіт зовнішніх і внутрішніх сил на можливих переміщеннях з використанням варіаційних принципів для пошуку кінематично можливих полів і сил деформування, які задовольняли б заданим умовам навантаження. Основи метода розроблені в роботах І. Я. Тарновського, О. А. Ганаго, А. А. Поздеева, В. Л. Колмогорова, Л. Г. Степанського, А. Г. Овчиннікова та ін. Варіаційний метод розв'язку задач теорії пластичності оснований на теоремах про екстремальні властивості поля швидкостей деформацій і поля напружень. Разом з дійсними розглядаються статично допустимі поля напружень і кінематично можливі поля швидкостей: перші із них задовольняють умовам рівноваги, пластичності та граничним умовам для напружень; другі – умові нестисливості, сумісності деформацій і граничним умовам для швидкостей. На основі відомих теорем будуються варіаційні функціонали і задача зводиться до пошуку полів, при яких варіаційні функціонали приймають екстремальні значення.

Розроблено ряд варіаційних принципів: віртуальних швидкостей і напружень, віртуальних переміщень і напружень, віртуальних швидкостей, віртуальних напружень, мінімуму повної потужності та ін., які дозволяють ефективно розв'язувати різні класи задач обробки металів тиском. Особливо поширені методи верхньої і нижньої оцінки сил деформування, які мають велике значення для практики [25, 27, 29, 37]. При використанні прямого варіаційного методу наближений розв'язок крайової задачі зазвичай приймають в вигляді лінійної комбінації координатних функцій з варіюємими числовими коефіцієнтами. Ці координатні функції повинні задовольняти заданим граничним умовам для швидкостей (при розв'язку задачі в швидкостях) або для напружень (при розв'язку задачі в напруженнях) [38–41]. Від того, наскільки вдало вибрані координатні функції, залежить точність розв'язку і складність алгоритму. Тому, проблема вибору координатних функцій обмежує використання цих методів.

Однак, варіаційно-енергетичний підхід має значні переваги. Головна із них – це узагальненість підходу. При постановці задачі не ставиться обмежень на реологічні властивості середовища, тобто можна досліджувати моделі від лінійно-пружних до пружно-пластичних з нелінійним зміцненням. Не ставляться також обмеження на геометричні характеристики досліджуваного процесу. Граничні умови в даному методі можуть бути самими різними (однорідними і неоднорідними, періодичними, по Діріхле і по Нейману). Тобто, є можливість варіювати розподілом сил контактного тертя і умовами зовнішнього теплообміну.

Починаючи з 50-х років минулого століття, в зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки, значний розвиток отримали чисельні методи. Всі чисельні методи можна поділити на три групи: сіточні, проекційні та проекційно-сіточні.

Метод сіток (метод скінчених різниць) використовується для чисельного розв'язку диференційних рівнянь в частинних похідних (в тому числі нелінійних і нестационарних) з початковими та граничними умовами [42]. Метод скінчених різниць дозволяє розв'язати диференціальне рівняння будь-якого типу, однак, він найбільш ефективний при розв'язку еліптичних та параболічних рівнянь в областях простої форми і з граничними умовами по Діріхле [43]. В інших випадках метод скінчених різниць менш ефективний. Другим недоліком методу є складність урахування криволінійних границь досліджуваних областей [44].

При розв'язку задач теорії пластичності метод скінчених різниць використовується для розв'язку задач методом ліній ковзання, а також методом функцій току. В деяких випадках доцільне сумісне використання метода скінчених різниць і варіаційно-енергетичного. При розв'язку задач в варіаційно-різницевій постановці труднощі при апроксимації граничних умов по Нейману зникають. Для врахування криволінійності границі використовують різні варіанти відображення досліджуваної області на іншу правильної форми. В цьому випадку також зростає складність побудови розв'язку.

Під проекційними розуміють велику групу методів чисельного розв'язку, в загальному випадку, операторних рівнянь. При цьому в

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-417-8>

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-417-8>

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-417-8>

*Наукове видання*

**Коцюбівська Катерина Іванівна  
Буренніков Юрій Анатолійович  
Сивак Іван Онуфрійович**

**РЕСУРС ПЛАСТИЧНОСТІ МЕТАЛІВ  
ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ВИДАВЛЮВАННІ З ПРОТИТИСКОМ**

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено К. Коцюбівською

Підписано до друку 01.06.2011 р.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. др. арк. 18,02  
Наклад 100 прим. Зам № 2011-116

Вінницький національний технічний університет,  
КІВЦ ВНТУ,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-81-59  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.