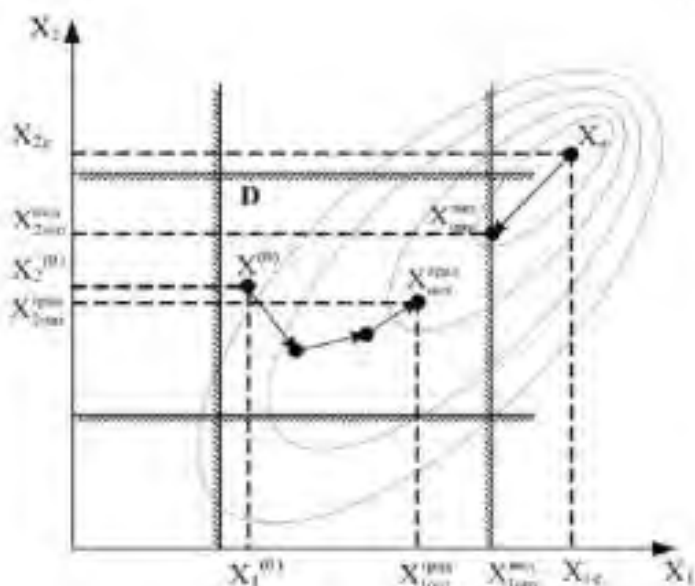


П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Нетребський, В. В. Теня

# ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ ТА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

# **ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ ТА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

**Монографія**

За загальною редакцією П. Д. Лежнюка

Вінниця  
ВНТУ  
2014

УДК 621.311.16  
ББК 31.27  
П76

Автори:

**П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Нетребський, В. В. Тептя**

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 27.12.2012 р.).

Рецензенти:

**В. М. Кутін**, доктор технічних наук, професор;

**В. М. Лисогор**, доктор технічних наук, професор.

**Принцип** найменшої дії в електротехніці та електроенергетиці :  
П76 монографія / за заг. ред. П. Д. Лежнюка. — Вінниця : ВНТУ,  
2014. — 212 с.

ISBN 978-966-641-576-2

В монографії розглянуто принцип найменшої дії (ПНД) і показано як він проявляється в електротехніці і електроенергетиці. Досліджується можливість формування умов самооптимізації нормальних режимів електроенергетичної системи на основі ПНД. Застосування ПНД розглядається щодо функціонування електричних систем з метою забезпечення умов для їх самоорганізації у відповідності з заданим критерієм оптимальності – втратами електроенергії. Ефективність використання ПНД показана на прикладі оптимального розподілу навантаження між електричними станціями. Показано, що ПНД доцільно використовувати для оптимізації режимів електроенергетичних систем.

УДК 621.311.16  
ББК 31.27

ISBN 978-966-641-576-2

© П. Лежнюк, В. Кулик, В. Нетребський, В. Тептя, 2014

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	7
ВСТУП .....	8
1 ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ І ЙОГО ПРОЯВИ В ПРИРОДІ .....	12
1.1 Формування принципу найменшої дії .....	12
1.1.1 Коротка історична довідка .....	12
1.1.2 Варіаційний принцип Гамільтона .....	18
1.2 Прояв принципу найменшої дії в електротехніці .....	22
1.2.1 Принцип найменшої дії як метод оптимізації складних систем .....	22
1.2.2 Електромеханічні аналогії і застосування ПНД в електротехніці .....	23
1.2.2.1 Електромеханічні аналогії .....	23
1.2.2.2 Застосування ПНД в електротехніці .....	27
1.3 Застосування ПНД в оптимальному керуванні режимами ЕЕС .....	32
1.3.1 Особливості і характеристика ЕЕС як об'єкта оптимального керування .....	32
1.3.2 Аналіз ПНД як методу формування оптимізуючих впливів на режими ЕЕС .....	34
1.4 Висновки .....	37
2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВ САМООПТИМІЗАЦІЇ НОРМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ЕЕС .....	39
2.1 Математичне моделювання умов оптимальності струморозподілу в ЕЕС .....	39
2.1.1 Варіаційний метод пошуку оптимальних рішень на основі принципу найменшої дії .....	39
2.1.2 Оптимальний струморозподіл в замкнутій електричній мережі .....	40
2.1.3 Оптимальний струморозподіл в електроенергетичній системі .....	45
2.1.3.1 Оптимальний струморозподіл при заданих струмах у всіх вузлах крім балансуєчого .....	45
2.1.3.2 Оптимальний струморозподіл, коли на струми у генерувальних вузлах не накладені обмеження .....	47

2.2 Математичне моделювання умов оптимальності потоків потужності в ЕЕС .....	49
2.3 Оптимальний розподіл навантаження між джерелами електроенергії.....	51
2.3.1 Математична модель електричної станції в оптимальному керуванні режимами ЕЕС на засадах ПНД. ....	51
2.3.2 Оптимізація режиму ЕЕС за реактивною потужністю і напругою. ....	55
2.3.3 Комплексна оптимізація режимів ЕЕС.....	58
2.4 Висновки .....	60
<b>3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ СТАНЦІЙ НА ПІДСТАВІ ПРИНЦИПУ НАЙМЕНШОЇ ДІЇ .....</b>	<b>62</b>
3.1 Математичне моделювання витратних характеристик ЕС.....	63
3.2 Критерії оптимальності найвигіднішого розподілу навантаження між джерелами електроенергії за різних умов експлуатації .....	67
3.2.1 Критерій оптимальності розподілу навантаження в умовах оптового ринку електроенергії.....	67
3.2.2 Критерій оптимальності розподілу навантаження в умовах ринку двосторонніх договорів.....	71
3.2.3 Критерій оптимальності розподілу навантаження в системі, що містить розосереджені джерела електроенергії.....	74
3.3 Аналіз чутливості втрат потужності, зумовлених експлуатацією джерел енергії в електроенергетичній системі.....	75
3.3.1 Аналіз чутливості взаємних і транзитних втрат потужності в ЕЕС.....	77
3.3.2 Визначення втрат потужності під час транспортування електроенергії за економічного і оптимального поточкорозподілу в ЕЕС.....	80
3.3.3 Оптимальне керування потоками в неоднорідних електричних системах з урахуванням чутливості.....	83
3.3.3.1 Визначення оптимальних е. р. с. від незбалансованих коефіцієнтів трансформації. ....	84
3.3.3.2 Визначення оптимальних коефіцієнтів трансформації трансформаторів зв'язку.....	86
3.4 Висновки .....	88

<b>4 ВИКОРИСТАННЯ ПНД ДЛЯ ВДОСКОНАЛЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НОРМАЛЬНИМИ РЕЖИМАМИ ЕЕС</b> .....	89
4.1 Алгоритм визначення параметрів оптимального режиму .....	89
4.1.1 Оптимізація режимів ЕЕС по активній потужності .....	90
4.1.2 Комплексна оптимізація режимів ЕЕС .....	94
4.1.3 Організація обчислювального процесу в ПК оптимізації режимів ЕЕС .....	96
4.2 Оцінювання та аналіз втрат потужності в ЕЕС для коригування тарифів за двосторонніми договорами .....	103
4.2.1 Алгоритм формування вектора чутливості втрат потужності в ЕЕС до зміни активних потужностей вузлів ЕЕС .....	103
4.2.2 Коригування тарифів на електроенергію з урахуванням чутливості втрат .....	105
4.2.3 Алгоритм визначення втрат потужності під час транспортування електроенергії за оптимального поточкорозподілу в ЕЕС .....	107
4.2.4 Алгоритм коригування цінових заявок з урахуванням двосторонніх договорів на постачання електроенергії .....	111
4.3 Використання ПНД в системах автоматичного керування .....	114
4.3.1 Автоматизація оптимального керування режимом ЕЕС з використанням ПНД .....	114
4.3.2 Автоматизація розподілу навантаження між електростанціями .....	117
4.4 Висновки .....	120
<b>5 ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПНД</b> .....	122
5.1 Розрахунок оптимальних режимів ЕЕС .....	122
5.2 Дослідження ефективності методів та алгоритмів оптимізації нормальних режимів на прикладі Південно-Західної ЕЕС .....	128
5.2.1 Особливості реалізації модуля комплексної оптимізації нормальних режимів електроенергетичних систем .....	128
5.2.2 Комплексна оптимізація нормального режиму на прикладі фрагмента схеми Південно-Західної ЕЕС .....	131
5.2.3 Формування графіків ведення оптимального режиму ЕЕС .....	135
5.3 Розрахунок оптимальних графіків потужності генерування в електроенергетичній системі .....	138

5.3.1	Визначення оптимального розподілу навантажень між джерелами електроенергії з урахуванням вартісних показників .....	138
5.3.2	Розрахунок оптимальних добових графіків навантаження джерел електроенергії на прикладі Південно-Західної ЕЕС .....	142
5.4	Визначення втрат в електричних мережах від транзитних перетоків потужності під час транспортування електроенергії від джерела до споживача .....	146
5.5	Аналіз чутливості оптимальних рішень до параметрів режиму ЕЕС в умовах їх експлуатації .....	155
5.5.1	Результати розрахунків з аналізу чутливості втрат потужності в ЕЕС до параметрів режиму .....	155
5.5.2	Аналіз чутливості оптимальних коефіцієнтів трансформації трансформаторів зв'язку до зміни потужностей у вузлах ЕЕС .....	157
5.6	Висновки .....	160
	ВИСНОВКИ .....	162
	ЛІТЕРАТУРА .....	165
	Додаток А вихідні дані та результати розрахунку усталеного режиму для тестової 14 вузлової електричної схеми ІЕЕЕ .....	182
	Додаток Б Вихідні дані та результати розрахунку усталеного режиму для схеми 110–750 кВ Південно-Західної електроенергетичної системи .....	187
	Додаток В Результати оптимізації обсягів надходження потужності від окремих джерел для забезпечення споживачів електромереж 110–750 кВ Південно-Західної електроенергетичної системи .....	199
	Додаток Д Дослідження характерних параметрів ітераційного процесу оптимізації обсягів вироблення електроенергії в ЕЕС .....	203
	Додаток Е Розрахунок оптимальних добових графіків навантаження джерел електроенергії Південно-Західної ЕЕС .....	204

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АДЕ	– альтернативні джерела енергії
АСДК	– автоматизована система диспетчерського керування
АСК	– автоматизована система керування
АЧП	– аналіз чутливості та оптимізації втрат потужності
БД	– база даних
БР	– балансуючий ринок
ВДЕ	– відновлювані джерела енергії
ВДТ	– вольтододатковий трансформатор
ГЕС	– гідравлічна електрична станція
ДПЕК	– Донбаська паливно-енергетична компанія
ДРП	– джерела реактивної потужності
ЕГК	– енергогенерувальна компанія
ЕЕС	– електроенергетична система
ЕОМ	– електронно-обчислювальна машина
е. р. с.	– електрорушійна сила
ЕС	– електрична станція
ЛЕП	– лінія електропередачі
ОІК	– оперативно-інформаційний комплекс
ОРЕ	– оптовий ринок електричної енергії
ПК	– програмний комплекс
ПНВЕ	– принцип найменших втрат електроенергії
ПНД	– принцип найменшої дії
ПНТ	– постачальники за нерегульованим тарифом
ПРТ	– постачальники за регульованим тарифом
РДД	– ринок двосторонніх договорів
РДЕ	– розосереджені джерела електроенергії
РЕ	– ринок електричної енергії
РП	– регулювальний пристрій
РПН	– регулювання під навантаженням
САК	– система автоматичного керування
СОП	– спеціальний обчислювальний пристрій
ТЕС	– теплова електрична станція
ХЕО	– характеристика економічних опорів



## ВСТУП

В сучасній енергетиці України вдосконалюються ринкові форми, очікується зростання електричного навантаження, інтелектуалізуються електричні мережі енергосистем [97, 139, 143]. З впровадженням балансуєчого ринку електроенергії та електропостачання за двосторонніми договорами, з розвитком сучасних інформаційних технологій низка задач в електроенергетичних системах (ЕЕС) і методи їх розв'язання вимагають перегляду. Зокрема до таких задач відноситься задача оптимізації нормальних режимів ЕЕС.

Нормальні стани ЕЕС відрізняються між собою параметрами режиму і кількістю електроенергії, що витрачається на її транспортування від джерел до споживачів (втрати електроенергії). Значення цих втрат окрім параметрів системи, значень навантажень і генерування залежить також від керуючих параметрів, – параметрів регулюючих пристроїв (РП) (трансформаторів, автотрансформаторів, вольтододаткових трансформаторів, лінійних регуляторів, джерел активної і реактивної потужності). При зміні будь-якого з параметрів в ЕЕС встановлюється новий режим, що характеризується певними параметрами режиму і значенням втрат електроенергії. Не завжди наявність існуючого механізму зворотних зв'язків, завдяки якому здійснюється саморегулювання системи, може забезпечити режим, який найвигідніший з погляду якості електроенергії і мінімуму її втрат [7]. Таким чином, цю властивість ЕЕС як штучної системи кібернетичного типу [7] необхідно удосконалювати.

Оскільки електричні мережі ЕЕС за своєю природою є неоднорідними, то ця їх особливість завжди призводить до додаткових втрат електроенергії під час її транспортування і розподілу. Мінімізувати ці втрати, тобто перейти від природного стану ЕЕС до оптимального, можливо тільки примусово. Шляхи і методи тут відомі різні [40]. Проте в сучасних умовах вони вимагають вдосконалення. Адаптацією методів оптимізації режимів ЕЕС до ринкових умов активно займаються вчені на пост-радянському просторі [17, 32, 34, 129, 136, 145].

При реалізації відмічених підходів для вибору кращих варіантів з різною ефективністю використовуються числові методи лінійного і нелінійного програмування. Загальним їх недоліком є те, що вони дають часткові розв'язки. У даній роботі досліджується можливість формування умов самооптимізації нормальних режимів ЕЕС на основі принципу

найменшої дії (ПНД) [75, 144]. Застосування ПНД розглядається стосовно функціонування ЕЕС з метою забезпечення умов для їх самоорганізації, або самооптимізації їх функціонування у відповідності з заданим критерієм оптимальності – втратами електроенергії. В цьому сенсі стосовно оптимізації станів ЕЕС ПНД можна формулювати як принцип найменших втрат електроенергії (ПНВЕ) на підтримання нормальних режимів ЕЕС.

Перенесення закономірностей довільних систем на електроенергетичну систему дозволяє стверджувати, що у будь-який момент часу функціонування для поточної сукупності параметрів системи та незалежних параметрів режиму вона знаходиться в оптимальному стані з точки зору технічних втрат електроенергії, але глибина цього оптимуму зумовлена мірою ідеальності самої системи. Таким чином, сприяння природному розвитку ЕЕС, тобто підвищенню міри її ідеальності, дозволяє завдяки механізмам самооптимізації забезпечувати зниження технічних втрат електроенергії незалежно від її навантаження. Саме це є суттєвою перевагою такого підходу порівняно з класичними методами оптимізації [40].

Підвищення міри ідеальності ЕЕС забезпечується розвитком її у двох напрямках: шляхом оптимізації параметрів режиму системи та за рахунок насичення системи від'ємними зворотними зв'язками. Обидва напрямки є взаємопов'язаними і для забезпечення максимального системного ефекту мають розглядатися в комплексі.

Для того, щоб виявити фізичну суть оптимізації конструктивних параметрів ЕЕС під час їх проектування і реконструкції, а також, щоб виявити сутність реалізації зворотних зв'язків в ЕЕС, необхідно встановити першопричини відхилення станів системи від глобального оптимуму за заданим критерієм оптимальності та дати їм оцінку, що дозволить розв'язати актуальну задачу оптимізації нормальних режимів електроенергетичних систем на засадах принципу найменшої дії.

Останні десятиліття в Україні відбуваються реформи в енергетичному секторі з метою впровадження ринкових методів керування. Було засновано оптовий ринок електроенергії (ОРЕ), на якому здійснюються операції купівлі-продажу електричної енергії за участі конкуруючих енергогенерувальних компаній, системних операторів та незалежних постачальників електричної енергії [122].

Особливості формування і функціонування ринку електроенергії обумовлюють специфічні її властивості, а саме: однорідність товару, універсальність, неможливість складувати товар, постачання тільки через електричні мережі, режим виробництва визначається режимом споживання. Такі особливості електроенергії ускладнюють процес керування в реальному часі. Жорсткі системні вимоги щодо балансу потужності та якості електричної енергії призводять до того, що при організації торгівлі в режимі реального часу споживачі не мають технічної можливості спостерігати за змінами цін, а тим більше реагувати на них зміною своєї поведінки.

Всі структурні перетворення в електроенергетиці повинні бути відображені в методах керування режимами електроенергетичних систем і математичних моделях. Планування режимів роботи повинне враховувати як технічні, так і економічні особливості функціонування суб'єктів енергосистеми. Враховуючи, що функціонування потужних компаній (виробників, постачальників та споживачів електроенергії) у конкурентних умовах призводить до конфлікту інтересів, необхідно замінювати постановку оптимізаційних задач, критерії оптимальності роботи ЕЕС і т. д. Оптимізацію функціонування джерел енергії вже не можна розглядати як задачу мінімізації витрат умовного палива. Тут доцільно розв'язувати комплекс задач забезпечення максимального прибутку від продажу електроенергії енергогенерувальною компанією у сукупності з мінімізацією витрат на транспортування енергії залежно від договірних умов.

З появою конкурентного ринку постає необхідність вдосконалення створених та розроблення нових моделей та методів розрахунку. Набуває актуальності розроблення програмного забезпечення для роботи ринку за новою моделлю та модернізації існуючої інформаційної інфраструктури енергосистеми, що дозволить вдосконалити процес електропостачання і керування енергосистемою. Очевидно, що нові розробки повинні орієнтуватися на застосування Smart Grid технологій.

На сьогодні способи передачі електроенергії базуються на принципах «одностороннього» зв'язку, розроблених багато десятиліть тому: електростанція направляє електроенергію до виробничих і офісних споруд, житлових будинків і т. д. Проте зі збільшенням частки альтернативних джерел, збільшується кількість вузлів, через які електроенергія надходить в розподільні мережі (так звана концепція розосередженого гене-

рування). Тому інфраструктура і методи керування режимами електричних мереж повинні ставати все більш «розумними», щоб забезпечити оптимальний розподіл електроенергії, отриманої з різних джерел. Мережі повинні вміти керувати передачею енергії та її споживанням, причому робити це в режимі реального часу, з максимальною ефективністю та на основі використання нових інформаційних технологій. Мова йде про впровадження технологій Smart Grid [54, 117, 120, 160, 164]. Наявність оптимізованих двосторонніх комунікаційних зв'язків в електричних мережах дозволить енергопостачальним компаніям скоротити втрати електроенергії в мережах. Автоматизовані системи диспетчерського керування є одним з ключових сегментів, на яких значною мірою позначиться розвиток технологій Smart Grid. Впровадження таких технологій дозволить регулювати попит, зсуваючи його в часі і тим самим вирівнюючи графік електроспоживання. Отже, Smart Grid підвищить ефективність генерування, транспортування і споживання електроенергії.

Як показує досвід, в сучасних умовах експлуатації найбільшої уваги вимагають задачі оперативного керування ЕЕС, при якому оброблення інформації і керування ведуться в режимі реального часу. Серед задач оперативно-диспетчерських служб в сучасних умовах важливою є задача вибору оптимального складу енергогенерувального обладнання. Вона повинна розв'язуватись з урахуванням тарифів на електроенергію виробників, запланованих об'ємів постачання електричної енергії, прогнозованих графіків електроспоживання, стану енергогенерувального обладнання, графіків планових ремонтів обладнання, метеорологічних факторів тощо [95, 96, 98, 99, 119, 120]. Враховуючи нагальність вирішення проблеми визначення оптимальних параметрів джерел електроенергії та зростаючий інтерес до проблеми використання відновлюваних джерел енергії, можна стверджувати про актуальність використання нових методів оптимального керування процесами виробництва, передачі і розподілу електроенергії.

Таким чином, метою даної роботи є підвищення ефективності виробництва і транспортування електричної енергії в електроенергетичній системі за рахунок впровадження нових і вдосконалення існуючих методів та алгоритмів оптимального розподілу навантаження між джерелами електроенергії з урахуванням мінімізації втрат електроенергії під час її транспортування та розподілу.

# 1 ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ І ЙОГО ПРОЯВИ В ПРИРОДІ

## 1.1 Формування принципу найменшої дії

### 1.1.1 Коротка історична довідка

Екстремальні принципи в класичній механіці вперше були сформульовані Г. Лейбніцем, П. Мопертюї, Л. Ейлером, в оптиці – П. Ферма. Але лише Ж. Лагранж і, особливо, У. Гамільтон додали їм той сенс і ту форму, яка виявилася плідною надалі у всіх розділах фізики. Термін «варіаційні принципи» пов'язаний з уявленням про математичну операцію варіювання (як правило позначається символом  $\delta$ ), тобто з виділенням деякого дійсного руху або стану як єдиного шляхом перебору спектра всіх можливих рухів або станів. Це рух або стан трактують як екстремальний по відношенню до всього різноманіття можливих.

Термін «екстремальні принципи» відтіняє у філософському сенсі певні моменти загальності цих принципів, що виходять далеко за межі фізики, – в кібернетику, біологію, теорію систем і ін. Він взагалі виділяє універсальність стосунків між максимумами і мінімумами або навіть просто наявність їх в процесах вимірювання.

Багато вчених XVII–XIX сторіччя намагались встановити єдине джерело для виведення диференційних рівнянь будь-якого фізичного процесу. «Ми повинні збирати і групувати явища до тих пір, – розмірковував Гамільтон, – поки наукова уява розрізнить в них прихований закон і єдність виникне з різноманіття. Потім ми повинні знову вивести з єдності різноманіття і за допомогою відкритого нами закону передбачати ще не виявлені явища» [118].

Варіаційний принцип для фізичної проблеми вперше був виразно сформульований в геометричній оптиці в XVII ст. і застосований до розв'язування задач віддзеркалення і заломлення світла. Це був принцип «найкоротшого часу» або «принцип Ферма». П. Ферма (1601–1665) в 1662 р. поклав в основу свого дослідження закону заломлення принцип найкоротшого часу. У замітці «*Synthesis ad Refractiones*» він вивів закон заломлення світла геометричним способом, виходячи з цього принципу. На думку Ферма, – «природа діє найбільш легкими доступними шляхами, а зовсім не коротшими, як це думає багато

хто». Конкретизуючи цю ідею, він говорить: «Подібно до того як Галілей, коли розглядав рух важких тіл в природі, вимірював відношення його не стільки відстанню, скільки часом, ми так само розглядаємо не найкоротші відстані або лінії, а ті, які можуть бути пройдені легше, зручніше і за коротший час» [118]. Закономірно виникла проблема відшукування аналогічних завдань з мінімальним значенням часу в механіці.

Вперше термін «дія» сформульований Лейбніцем (1646–1716), на який в цьому відношенні посилається і Мопертюї (1698–1759). Він викладений в праці з динаміки, над якою працював Лейбніц, але яка залишилась незавершеною і лише в 1860 р. була видана Г. І. Гергардтом [118]. Лейбніц називав цю величину «*actio formalis*». Сенс цього поняття полягає в тому, що зміна положення, що відбувається безперервно внаслідок сили інерції рухомої маси, само собою впливає з поняття маси, є її дією – «*actio formalis*». Визначається ця величина добутком маси, швидкості і довжини шляху, а оскільки довжина шляху може бути представлена у вигляді добутку швидкості на якийсь час, то величина дії визначається добутком живої сили на якийсь час.

У 1746 р. Мопертюї оголосив про універсальний закон руху і рівноваги – принцип найменшої кількості дії. Термін «кількість дії» розуміється в сенсі «дії» і вимірюється добутком  $mvs$ , де  $m$  – маса,  $v$  – швидкість,  $s$  – шлях, що проходить тіло. Для руху,  $mvs = \min$ , а у разі рівноваги, положення тіла таке, що коли йому переданий малий рух, то проведена кількість дії виявляється мінімальною.

Універсальний характер принципу Мопертюї доводить за допомогою аргументів телеологічного і теологічного характеру. Проголосивши принцип найменшої дії загальним законом світла, Мопертюї в 1746 р. представив Берлінській Академії роботу, в якій він застосував цей принцип для удару тіл і для випадку рівноваги.

Можна сказати, що найбільшою заслугою Мопертюї є висунення принципу мінімуму кількості дії як універсального закону природи, тоді як у Ейлера (1707–1783) те ж співвідношення має більший сенс і точний математичний вираз. Воно розглядалося як застосоване до окремих задач. Ось у цьому універсальному сенсі сформульованого Мопертюї принципу найменшої дії і міститься причина визнання Ейлером пріоритету Мопертюї. У цьому сенсі слів такого принципу не

було ні у Лейбніца, ні у Ейлера, хоча той же принцип, але не зведений в ранг «закону всесвіту», був відкритий Ейлером навіть раніше Мопертюї.

Спроба введення телеології в механіку викликала різку відсіч. Опубліковані Мопертюї роботи, в яких давалося телеологічне «обґрунтування» принципу найменшої дії, викликали велику дискусію, що вийшла далеко за межі механіки. У цій дискусії переплелися питання пріоритету, натурфілософські і фізичні питання про міру руху і фундаментальні проблеми світогляду і філософії.

В процесі розв'язування задачі про брахістохрон Я. Бернуллі висловив принцип, який хоч і не має загального характеру, але зіграв значну роль як на першій стадії розвитку варіаційного числення, так і у формулюванні Ейлером принципу найменшої дії. За принципом Я. Бернуллі, якщо будь-яка крива має властивість максимуму або мінімуму, то кожна її нескінченно мала частина має таку ж властивість. Саме це дозволило Ейлерові написати замість кінцевого шляху  $s$ , що входить у формулу, дану Мопертюї, елемент шляху  $ds$  і тим самим зробити крок вперед.

Ейлерові належить історично перша виразна ідея математичного змісту, який вкладається наукою в принцип найменшої дії. Саме Ейлер в 1744 р. показав, що для траєкторій, що описуються під дією центральних сил, інтеграл  $\int v ds$ , де  $v$  – швидкість, завжди рівний мінімуму або максимуму. Ейлер не дав цьому виразу якого-небудь спеціального найменування.

Математичний вираз, названий принципом найменшої дії, у Ейлера природно впливав з його робіт по пошуку кривих, що мають екстремальні властивості. Обмеження універсальності його характеру виявлялося з того, що у Ейлера він органічно пов'язаний із законом живих сил і має місце тільки там, де застосовний останній.

Робота Ейлера робить незначною роль Мопертюї, якому, по суті, належить тільки назва принципу. Мопертюї сам пише: «Цей великий геометр (Л. Ейлер) не тільки обґрунтував принцип ґрунтовніше, ніж це зробив я, але його погляд, більш охоплюючий і проникливіший, ніж мій, привів його до відкриття висновків, яких я не вбачав» [118]. Проте, не дивлячись на те, що вираз, що є математично осмисленою формою принципу найменшої дії, даний Ейлером незалежно і одноча-

сно з роботами Мопертюї, які були математично аморфні і не містили в собі ядра майбутнього прогресу, Ейлер завжди підкреслював пріоритет Мопертюї.

В процесі розвитку варіаційних принципів і методів телеологічні аргументи і ідеї поступово природно відпадають, оскільки їм немає місця в достовірно науковому знанні. Ейлер переконався в тому, що каузальне пояснення зовсім не еквівалентне телеологічному опису явищ, але має перед останнім ту очевидну перевагу, що будь-яка проблема механіки може бути вирішена без допомоги принципу найменшої дії, тоді як застосування останнього вимагає при розгляді конкретних завдань попереднього знання їх вирішення.

Досліджуючи фактичне застосування принципу до завдань механіки, Ейлер побачив, що знайти вираз, який повинен бути максимумом або мінімумом, для кожного завдання можна тільки тоді, коли вже відомий розв'язок цієї задачі, отриманий, виходячи із звичайних загальних принципів механіки, що формулюють не кінцеву мету, а причинно-наслідкові зв'язки явищ. Таким чином, евристичне значення принципу виявилось нікчемним. Він не дає можливості передбачати або встановити закони навіть тих механічних явищ, які досліджуються звичайними диференціальними рівняннями руху Ньютона. Як також було відмічено Ейлером, універсальність принципу найменшої дії навіть в межах механіки не є встановленою і він, Ейлер, не може скільки-небудь упевнено оцінити межі його застосовності. Треба відзначити, що Ейлер абсолютно не розглядав питання про визначення характеру варійованих рухів.

Після ряду спроб Ейлер припинив свої дослідження, пов'язані з принципом найменшої дії, хоча ця область дуже цікавила його як додаток розроблених ним методів пошуку кривих ліній, що мають властивість максимуму або мінімуму. Все це показує, що хоча Ейлер і не звільнився повністю від впливу телеологічного фіналізму Мопертюї, він, проте, прагнув математизувати принцип найменшої дії [107, 118]. Ейлер, не дивлячись на використання ним термінології Мопертюї, сформулював ідеї, які далеко перевершують обмежені і односторонні вислови Мопертюї. Ейлерові належить перше точне і математично плідне формулювання принципу найменшої дії, що відкрило нові горизонти для достовірно наукового застосування. Він є дійсним осно-



воположником науково сформульованого принципу найменшої дії в механіці. Він надав йому наукову форму. Потрібний був ще тільки один крок для того, щоб математично узагальнити його. Цей крок зробив Лагранж.

Саме Лагранж зіграв вирішальну роль в розвитку принципу найменшої дії. Він розповсюдив принцип, сформульований Ейлером для матеріальної точки, на випадок довільної системи точок, що пов'язані між собою і діють одна на одну абсолютно довільним чином. Таким чином, виявляється можливим застосувати принцип найменшої дії до динаміки системи.

Для Лагранжа принцип найменшої дії не пов'язаний з тим специфічним теологічним змістом, який вклав в нього Мопертюї. І, немов відповідаючи Ейлерові, Лагранж в своїй «Аналітичній механіці» говорить, що він називає цей принцип «принципом найменшої дії, за аналогією з принципом, який Мопертюї дав під цією назвою» [63, 118]. Лагранж в «Аналітичній механіці» ставить питання про фізичний сенс принципу найменшої дії. Саму назву «принцип найменшої дії» він вживає лише за традицією. Ця назва зовсім не відповідає математичному формулюванню принципу. Телеологія впливає не з механіки в її математичному формулюванні, а привноситься ззовні упередженими і довільними узагальненнями і невизначеними найменуваннями, «немов невизначені і довільні найменування склали суть законів природи і за допомогою якоїсь прихованої властивості здатні прості висновки з відомих законів механіки піднести до степеня кінцевих причин» [118].

Лагранж помічає довільність найменування величини  $mvs$  дією. Він вказує, що ця довільність і неясність в термінології дають можливість протягати телеологію туди, де їй інакше не було б місця. «Ці найменування, що даються нами, у жодному випадку не складають суті законів природи» [107]. Все значення, яке можна приписати цьому принципу, визначається його зв'язком із законом збереження живої сили і його математичною формою виразу. «Цей принцип, будучи сполучений з принципом живих сил і розвинений за правилами варіаційного числення, дає всі рівняння, необхідні для розв'язання кожної проблеми» [107]. Він дійсно є загальним методом вирішення проблем руху тіл, але це у жодному випадку не є самостійним, особливим ме-

тодом. Таким чином, в «Аналітичній механіці» принцип найменшої дії жодною мірою не є основним принципом механіки (не говорячи вже про природу).

Серед інших дослідників, що займалися питаннями, пов'язаними з принципом найменшої дії, необхідно відзначити Л. Карно (1753–1823). Під безпосереднім впливом робіт Лагранжа Л. Карно застосував принцип найменшої дії до теорії удару і встановлення загальних теорем імпульсного руху. У формулюванні Л. Карно «більш не залишається нічого невизначеного в принципі Мопертюї, який виражений строго і математично». Виключивши категорично всякий метафізичний аспект Л. Карно указує разом з тим, що претензії Мопертюї на універсальність принципу не обґрунтовані, і зокрема відзначає, що і в області законів удару, які виводив з нього Мопертюї, цей принцип не охоплює випадку, коли тіла мають різний ступінь пружності. В окремих же випадках за допомогою цього принципу можна отримати цікаві і корисні результати.

Наступний важливий крок зробив французький учений Пуассон, виходячи з розробленого Лагранжем методу варіації довільних постійних. Разом з тим він завершив включення всякої сторонньої метафізики з питань, пов'язаних із співвідношенням, що отримало назву принципу найменшої дії.

В подальшому до варіаційних принципів звернувся ірландський математик У. Гамільтон (1805–1865). Він будує свій загальний метод динаміки на основі розгляду і розвитку оптико-механічної аналогії. Гамільтон розглядає функцію, що вводиться ним, як результат індукції в оптичній науці. Ця функція охоплює всю геометричну оптику. Але важливо інше. Гамільтон відзначає в загальному вигляді спорідненість принципу Ферма і принципу найменшої дії. Звичайно, звідси ще досить далеко до побудови такої математичної схеми, в якій оптика променів збігалася б з механікою матеріальної точки. Тут ще немає нічого принципово нового, бо спорідненість принципу Ферма і принципу найменшої дії наголошувалося і раніше. Лише пізніше, коли в розробленій Гамільтоном математичній теорії співпадуть форми рівнянь променевої оптики і механіки, визначиться те, що називається оптико-механічною аналогією.

Таким чином, всі ці дослідження можна узагальнити таким чином. Мопертюї оголосив про універсальний закон руху і рівноваги – принцип найменшої кількості дії (principe da la moindre action). Термін «кількість дії» розуміється в сенсі «діяльності» і вимірюється як  $I = mvs$ .

Для руху  $mvs = \min$ , а у разі рівноваги, положення тіла таке, що коли йому переданий малий рух, то проведена цим кількість дії виявляється мінімальною.

Ейлер показав, що для випадку руху в полі центральної сили траєкторія, по якій рухається тіло, задовольняє вимогу [19]

$$\int v ds = \min.$$

Лагранж узагальнив цей принцип у вигляді [63]

$$\sum m_i \int v_i ds_i = \min.$$

Він розповсюдив принцип, сформульований Ейлером для матеріальної точки, на випадок довільної системи точок, що зв'язані між собою і діють одна на одну абсолютно довільним чином. Таким чином, виявляється можливим застосувати принцип найменшої дії до динаміки системи.

Гамільтон виходив з припущення, що система може бути і зв'язана, але кінетична енергія є однорідною функцією другого порядку від узагальнених швидкостей. Таким чином, він неявно припускав стаціонарність зв'язків.

Розглянемо більш детально особливості варіаційного принципу Гамільтона стосовно динамічних систем і траєкторій їх руху.

### 1.1.2 Варіаційний принцип Гамільтона

Як фундамент механіки можуть розглядатися не тільки диференціальні рівняння

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (1.1)$$

$$L = K - \Pi, \quad (1.2)$$

що зв'язують механічні параметри в даний момент часу  $t$ , але також деякі загальні властивості, що характеризують рух механічної системи в цілому, на будь-якому довільному відрізку часу від  $t_1$  до  $t_2$ .

В (1.1) і (1.2):  $q$  – деякий узагальнений параметр,  $L$  – лагранжян системи,  $K$  – кінетична енергія,  $\Pi$  – потенційна енергія.

Переконаємося в цьому, аналізуючи величину

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) \cdot dt, \quad (1.3)$$

названу дією по Гамільтону на відрізку  $[t_0, t_1]$ .

Очевидно, що (1.3) є функціоналом, який залежить від того, як рухається система в момент часу  $t_0 \leq t \leq t_1$  (див. рис. 1.1).

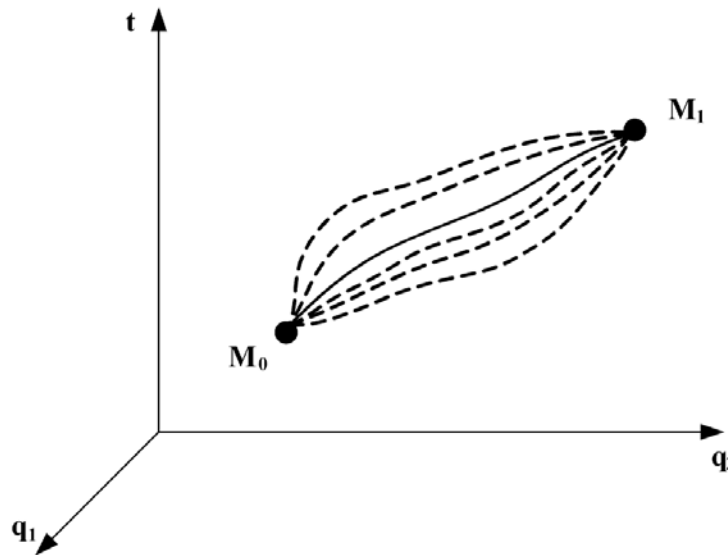


Рисунок 1.1 – Можливі траєкторії руху системи з однієї точки в іншу

Візьмемо в  $(n+1)$ -вимірному просторі  $q, t$  дві точки  $M_0(q(t_0), t_0)$  і  $M_1(q(t_1), t_1)$ , зафіксувавши тим самим моменти  $t_0, t_1$  і положення системи в ці моменти («швидкості»  $\dot{q}$  в моменти  $t_0, t_1$  не фіксуються). З точки  $M_0$  в точку  $M_1$  система може потрапити, рухаючись в просторі  $q, t$ , за будь-якими можливими траєкторіями (шляхами), тобто шляхами, що допускаються існуючими зв'язками. Нехай серед цих шляхів є так званий прямий шлях (суцільна лінія). На ньому функції  $q_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , у будь-який момент часу підкоряються рівнянням Лагранжа (1.1). Решта шляхів називається обхідними (штрихові лінії).

Принцип Гамільтона формулюється так: дія  $Q$  має на прямому шляху екстремальне в порівнянні з обхідними шляхами значення [39, 46].

Охарактеризуємо всі можливі шляхи однопараметричним сімейством функцій

$$q_j = q_j(t, \alpha), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad |\alpha| \leq \beta < \infty, \quad j = \overline{1, n}$$

де значенню  $\alpha = 0$  відповідає прямий шлях, а значенням  $\alpha \neq 0$  – обхідні шляхи. Тоді дія (1.3), очевидно, є функцією параметра  $\alpha$ :

$$Q(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[q_j(t, \alpha), \dot{q}_j(t, \alpha), t] dt.$$

Варіація  $Q$  при варіюванні параметра  $\alpha$

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt, \quad (1.4)$$

дорівнює сумі приростів, викликаних варіацією координат  $\delta q_j(t, \alpha)$  і швидкостей  $\delta \dot{q}_j(t, \alpha)$ .

Проінтегрувавши по частинах другий член в правій частині (1.4), отримуємо

$$\delta Q = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta(\dot{q}_j) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j \cdot dt,$$

або, використовуючи переставність операцій варіювання по  $\alpha$  і диференціювання по  $t$ :

$$\delta(\dot{q}_j) = \delta \left[ \frac{dq_j(t, \alpha)}{dt} \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{d}{dt} q_j(t, \alpha) \delta \alpha = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} q_j(t, \alpha) \delta \alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_j,$$

приходимо до рівності

$$\delta Q = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j \cdot dt. \quad (1.5)$$

За побудовою варіації  $\delta q_j(\alpha)$  дорівнюють нулю в моменти  $t_0, t_1$ , тобто дорівнює нулю перший член в правій частині (1.5). Для прямого

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-576-2>

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-576-2>

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-576-2>

*Наукове видання*

**Лежнюк Петро Дем'янович  
Кулик Володимир Володимирович  
Нетребський Володимир Васильович  
Тептя Віра Володимирівна**

**ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ  
В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ ТА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

Монографія

Редактор С. Малішевська  
Оригінал-макет підготовлено В. Тептя

Підписано до друку 27.06.2014 р.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. др. арк. 12,24  
Наклад 300 (1-й запуск 1–75) прим. Зам № В2014-31

Вінницький національний технічний університет,  
КІВЦ ВНТУ,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.  
21021, м. Вінниця, вул. Порика, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.