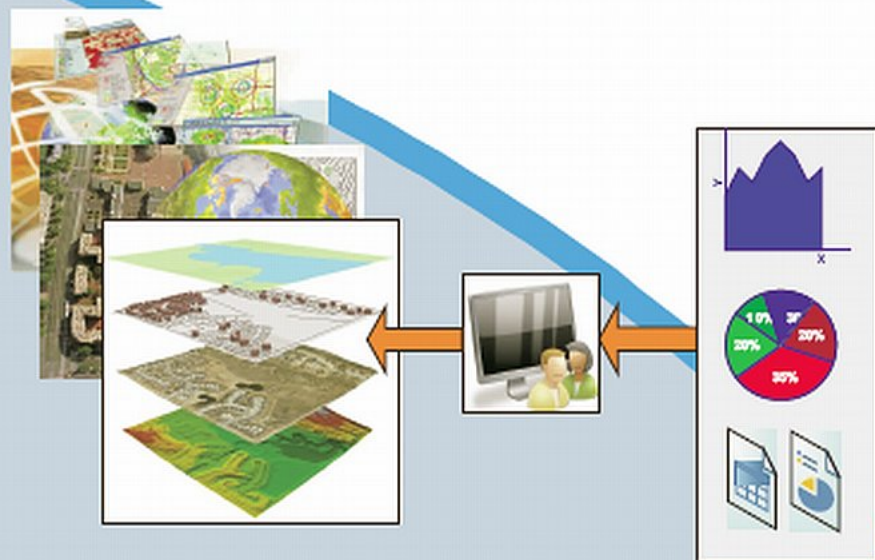


*В. Б. Мокін, Є. М. Крижановський, М. П. Боцула*



**ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ  
ІНТЕГРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ  
МОДЕЛЕЙ У ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ  
СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ  
ПОВЕРХНЕВИХ ВОД**

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Вінницький національний технічний університет

**В. Б. Мокін, Є. М. Крижановський, М. П. Боцула**

**ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ  
ІНТЕГРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ  
МОДЕЛЕЙ У ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ  
СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ  
ПОВЕРХНЕВИХ ВОД**

**Монографія**

Вінниця  
ВНТУ  
2011

УДК 004.65 : 519.6+556

ББК 32.97 : 22.16+26.22

М74

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №3 від 28.10.2010 р.).

Рецензенти:

**Г. В. Аверін**, доктор технічних наук, професор

**С. Ф. Теленик**, доктор технічних наук, професор

**Мокін, В. Б.**

М74 Інформаційна технологія інтегрування математичних моделей у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод : монографія / В. Б. Мокін, С. М. Крижановський, М. П. Боцула. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 152 с.

ISBN 978-966-641-394-2

В монографії представлена технологія інтегрування математичних моделей у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод. Описано комплекс методів, прийомів, алгоритмів та програмного забезпечення, яке було апробовано та впроваджено на практиці для розв'язання важливих прикладних задач у галузі моніторингу поверхневих вод та моделювання екологічних процесів у водних екосистемах в Україні. Розрахована на працівників екологічних організацій, студентів та аспірантів ВНЗ, котрі спеціалізуються в галузі екології.

**УДК 004.65+519.6**

**ББК 32.97 : 22.16+26.22**

**ISBN 978-966-641-394-2**

© В. Мокін, С. Крижановський, М. Боцула, 2011

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ.....	6
ВСТУП .....	7
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПРОБЛЕМ ТА ПІДХОДІВ ДО ІНТЕГРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД.....	10
1.1. Аналіз проблем створення інформаційних систем оцінювання та прогнозування стану поверхневих вод за даними моніторингу.....	10
1.1.1. Огляд детермінованих математичних моделей зміни якості поверхневих вод.....	11
1.1.2. Аналіз спеціалізованих математичних обчислювальних пакетів.....	23
1.1.3. Аналіз сучасних пакетів для роботи з геоінформаційними системами екосистем.....	27
1.1.4. Аналіз функціонуючих в Україні інформаційних систем екологічного моніторингу загальнодержавного та міжрегіонального рівня.....	29
1.2. Аналіз технологій та підходів до застосування математичних моделей у ГІС моніторингу поверхневих вод.....	32
1.3. Висновки та постановка задач дослідження.....	36
РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА ТЕОРЕТИЧНИХ ОСНОВ ФОРМАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ МОНІТОРИНГУ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД ТА МЕТОДІВ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ .....	38
2.1. Формалізація параметрів математичних моделей, інформації баз даних та даних ГІС за єдиним підходом.....	38
2.2. Розробка методу формування перехідних моделей від математичного до геоінформаційного представлення .....	45
2.3. Систематизація підходів до автоматизованого синтезу моделей різного типу, в залежності від ідентифікованості структури та параметрів цих моделей.....	47
2.4. Розробка теоретичних основ методу інтегрування математичних моделей у ГІС.....	50
2.5. Формалізація поняття інформаційної відповідності ГІС та математичних моделей.....	53
2.6. Висновки .....	56

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА НАУКОВИХ ЗАСАД АВТОМАТИЗАЦІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДАНИМИ ГІС МОНІТОРИНГУ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД.....	57
3.1. Автоматизоване оцінювання просторових характеристик об'єктів моделювання за даними карт ГІС.....	57
3.2. Формування інформаційної моделі баз даних ГІС.....	63
3.3. Автоматизація формування запиту для автоматизованої вибірки інформації із баз даних ГІС.....	68
3.4. Автоматизація формування таблиць у базі даних ГІС для збереження результатів ідентифікації математичних моделей...	72
3.5. Приклад ідентифікації математичної моделі за даними ГІС моніторингу поверхневих вод.....	76
3.6. Висновки .....	79
РОЗДІЛ 4. ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ІНТЕГРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З ГЕОІНФОРМАЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ МОНІТОРИНГУ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД .....	80
4.1. Архітектура та принципи функціонування інформаційної програмної системи інтегрування математичних моделей з геоінформаційними системами моніторингу поверхневих вод ..	80
4.2. Технологічні аспекти реалізації інформаційної технології інтегрування математичних моделей з геоінформаційними системами моніторингу поверхневих вод з використанням MS Excel та ГІС «Панорама 9» .....	81
4.2.1. Прийоми та рекомендації щодо формування розрахункової частини в MS Excel.....	83
4.2.2. Прийоми та рекомендації щодо вибору та підготовки ГІС у ГІС-пакеті «Панорама».....	84
4.2.3. Реалізація механізму автоматизації інтегрування розрахункової частини математичних моделей в MS Excel з ГІС у ГІС-пакеті «Панорама 9».....	85
4.3. Систематизація складових геоінформаційних моделей різних ГІС-пакетів .....	88
4.4. Алгоритм застосування технології до басейнових та регіональних геоінформаційних систем інтегрованого управління водними ресурсами в управліннях Держводгоспу та Мінприроди.....	89
4.4.1. Застосування інформаційної технології для моделювання попусків каскаду водосховищ річки Південний Буг.....	90
4.4.2. Застосування інформаційної технології для моделювання поширення забруднення після скиду вздовж	

течії річки за моделлю А. В. Фролова – І. Д. Родзиллера для басейну річки Кальміус.....	92
4.4.3. Застосування інформаційної технології для моделювання поширення забруднюючої речовини за двовимірною просторовою моделлю А. В. Караушева та моделлю в турбулентній зоні згідно положень теорії Л. Прандтля в басейні річки Дністер.....	93
4.5. Алгоритм застосування технології до Єдиної автоматизованої системи Державної екологічної інспекції та підрозділів аналітичного контролю територіальних органів Мінприроди України із отриманням результатів вимірювань стану забруднення довкілля, викидів, скидів і відходів, їх накопичення, оброблення та аналізування .....	94
4.6. Порівняння результатів застосування розробленої технології з результатами, отриманими за традиційними підходами.....	96
4.7. Визначення обмежень на доцільність та можливості автоматизованого інтегрування математичних та геоінформаційних моделей.....	97
4.8. Висновки .....	98
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	99
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	102
Додаток А Математична модель А. В. Караушева для розрахунку розбавлення стічних вод і розчинів у поверхневих водах .....	118
Додаток Б Характеристика математичних обчислювальних пакетів.....	120
Додаток В Характеристика сучасних геоінформаційних пакетів.....	126
Додаток Г Основні положення, операції та приклади секвенціального опису інформаційних моделей інформаційних систем.....	133
Додаток Д Характеристика ГІС інтегрованого управління водними ресурсами басейну р. Кальміус.....	139

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БД	– банк даних
БЗ	– база знань
БМД	– база метаданих
БУВР	– басейнове управління водними ресурсами
ВНТУ	– Вінницький національний технічний університет
ГІС	– географічна інформаційна (геоінформаційна) система
ГІС-пакет	– пакет програм для роботи з геоінформаційними системами
ГІАС	– геоінформаційна аналітична система
ПЯВ	– показник якості вод
ЦМР	– цифрова модель рельєфу

## ВСТУП

Важливою задачею сьогодення є моделювання та прогнозування стану поверхневих вод, що дозволяє розробляти науково-обґрунтовані рекомендації щодо покращення стану поверхневих вод. Розв'язанню цієї задачі сприяють системи екологічного моніторингу та кадастри природних ресурсів, що створюються як геоінформаційні системи (ГІС) та бази даних. У той же час, сучасний рівень досягнень теорії математичного моделювання, математичної фізики та теорії управління в реальних природних екосистемах є таким значним, що дає можливість моделювати та прогнозувати практично будь-які процеси у них. Для роботи з такими моделями використовуються спеціальні математичні пакети MS Excel, Matlab, Maple, Mathcad, Mathematica, Statistica, та інші або ж дослідники розробляють власні програми. Для збереження, обробки екологічних даних та їх візуалізації на картах ГІС використовуються спеціальні універсальні пакети програм (ГІС-пакети) ArcGIS, Mapinfo, ГІС «Панорама», Digitals, GeoDraw тощо або ж розробники створюють власне програмне забезпечення з використанням інструментарію цих ГІС-пакетів. При цьому, вбудований інструментарій обробки даних у ГІС-пакетах значно поступається можливостям спеціальних математичних пакетів. Для використання даних ГІС під час ідентифікації математичної моделі, як правило, або вручну роблять вибірку даних, яку потім підключають як вхідні дані в пакети Matlab, Maple, Mathcad тощо, або розробляють свою програму на основі ГІС-інструментарію, яка реалізовує математичні алгоритми та працює з даними ГІС. Кожна нова модель, кожна нова ГІС – окремий підхід, окремі програми, додатковий час.

В Україні існують спеціалізовані геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод з можливостями аналітичної обробки, розроблені в Українському науково-дослідному гідрометеорологічному інституті (В. Осадчий та інші), Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституті прикладного системного аналізу НАН України і Міносвіти і науки України, Українському НДІ екологічних проблем Мінприроди (О. Васенко, Є. Варламов та ін.), Донецькому національному технічному університеті (Г. Аверін та інші), Вінницькому національному технічному університеті (В. Мокін, А. Яцолт та інші), Інституті космічних досліджень НАН і НКА України (А. Колодяжний та інші). Є аналогічні розробки закордонних колективів: Vieux B., Bedient P., Jonathan J., Rodda J. та ін. – системи TUFLOW, GIS Hydro, Vflo, AQUASEA, LakeWatch, Surface Water Modeling System та інші. Безпосередньо автоматизацією інтеграції математичних моделей та ГІС екологічного моніторингу займаються



вчені Інституту проблем математичних машин і систем НАН України (М. Железняк та ін.). Інтеграція базується на описі ієрархії даних у системах за допомогою класів авторської мови програмування LIANA (Д. Гофман). Однак, більш актуальним є розробка технології інтегрування математичних моделей екологічних процесів у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод, яка передбачає формалізацію та здійснення розрахунків за моделями у спеціалізованих математичних пакетах MS Excel, Matlab, Maple, Mathcad, Mathematica тощо з подальшою візуалізацією результатів у ГІС. Можливість використання таких пакетів суттєво розширить коло можливих користувачів інформаційної технології, за рахунок тих, хто професійно займається математичним моделюванням процесів у водних екосистемах, але недостатньо володіють засобами ГІС.

Отже виникає необхідність розробки нової інформаційної технології інтегрування математичних моделей екологічних процесів у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод, яка дозволить поєднати обчислювальні можливості спеціалізованих математичних пакетів та можливості збереження і візуалізації інформації за допомогою геоінформаційних технологій та систем управління базами даних.

В книзі представлена технологія інтегрування математичних моделей у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод. Описано комплекс методів, прийомів, алгоритмів та програмного забезпечення, яке було апробовано та впроваджено на практиці для розв'язання важливих прикладних задач у галузі моніторингу поверхневих вод та моделювання екологічних процесів у водних екосистемах в Україні.

Практична цінність одержаних результатів полягає в тому, що:

1. Розроблена технологія дозволить розширити можливості та прискорити процес ідентифікації та апробації математичних моделей процесів у водних екосистемах за реальними даними систем державного моніторингу поверхневих вод та підвищити наочність візуалізації результатів математичного моделювання на картах ГІС.

2. З урахуванням розроблених рекомендацій та вимог, котрі забезпечують можливість використання розробленої технології, розроблено інформаційні аналітичні системи моніторингу стану та підтримки прийняття рішень для інтегрованого управління водними ресурсами:

- басейнів річок Південний Буг, Дністер, Тиса, Сіверський Донець, Кальміус, Прип'ять, які впроваджено у відповідних басейнових управліннях водними ресурсами та облводгоспах України;

- водних ресурсів Вінницької та Львівської областей, які впроваджено у Держуправлінні охорони навколишнього природного середовища у Вінницькій області та інших суб'єктах обласного державного

моніторингу Вінницької області та у Львівському облводгоспі, відповідно.

Книга містить чотири розділи.

У першому розділі приведено аналіз проблем та підходів до інтегрування математичних моделей екологічних процесів у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод.

У другому розділі розглянуто теоретичні основи формалізації математичних моделей та геоінформаційних систем моніторингу поверхневих вод та методів їх інтегрування.

У третьому розділі наведено наукові засади автоматизації ідентифікації параметрів та структури математичних моделей екологічних процесів за даними ГІС моніторингу поверхневих вод.

В четвертому розділі охарактеризовано розроблену інформаційну технологію інтегрування математичних моделей з геоінформаційними системами моніторингу поверхневих вод та наведено приклади її застосування на практиці.

Текст книги написаний, переважно, Є. М. Крижановським з матеріалів його кандидатської дисертації, де використано результати наукових досліджень д. т. н., професора В. Б. Мокіна. Також робота доповнена результатами досліджень к. т. н., доцента М. П. Боцули. Постановка задач та наукове керівництво дослідженнями здійснювалось професором В. Б. Мокіним.

Відзиви, зауваження і побажання просимо надсилати за адресою: 21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, кафедра моделювання та моніторингу складних систем Вінницького національного технічного університету.

Автори висловлюють подяку:

– почесному ректору ВНТУ, акад. НАПНУ, д.т.н., проф. Б. І. Мокіну, який протягом 2000–2009 рр. був науковим керівником науково-дослідної лабораторії екологічних досліджень та екологічного моніторингу ВНТУ, де виконано усі дослідження, та задавав напрямок досліджень даної роботи;

– завідувачу лабораторіями кафедри моделювання та моніторингу складних систем (ММСС) ВНТУ Н. М. Гончар за цінні коментарі та пропозиції у предметній галузі;

– колективу кафедри ММСС за допомогу у створенні інформаційних систем та в оформленні книги;

– за цінні поради, ідеї та консультації у предметній галузі досліджень: заступнику начальника Басейнового управління водними ресурсами річки Південний Буг Ю. С. Гаврикову.

# РОЗДІЛ 1

## АНАЛІЗ ПРОБЛЕМ ТА ПІДХОДІВ ДО ІНТЕГРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД

### 1.1. Аналіз проблем створення інформаційних систем оцінювання та прогнозування стану поверхневих вод за даними моніторингу

У даний час в Україні та за кордоном дані моніторингу поверхневих вод, як правило, зберігаються у форматі геоінформаційних систем (ГІС) [4, 48, 54, 79, 163, 174]. При цьому, поширеним є підхід, коли первинні дані про якість та кількість вод зберігаються в окремих базах даних ГІС, а просторова інформація (координати, просторові відношення з іншими об'єктами та інше) зберігається у форматі електронних карт ГІС екосистем. Для роботи з просторовими даними ГІС використовуються спеціальні універсальні пакети програм (ГІС-пакети) ArcGIS, Mapinfo, ГІС «Панорама», Digital, GeoDraw тощо [4, 54]. Для роботи з базами даних використовуються спеціалізовані системи управління базами даних (СУБД) MS, Access, MySQL, Visual FoxPro, Oracle та ін. або вбудовані засоби ГІС для роботи з базами даних [46, 54, 98, 113].

Сучасні ГІС мають спеціальні засоби для складної математичної обробки даних моніторингу. Найбільш відомими серед них є такі: ArcSpatial Analyst, Mapinfo, Panorama тощо [4, 11, 54, 123, 128]. При цьому, вбудований інструментарій обробки даних ГІС-пакетів значно поступається можливостям спеціальних математичних пакетів. Для ідентифікації складних математичних моделей та застосування специфічних методів математичного моделювання за даними ГІС розробники, як правило, або вручну роблять вибірку даних, яку потім підключають як вхідні дані у спеціалізовані обчислювальні пакети Matlab, Maple, Mathcad тощо, або розробляють свою програму на Delphi, Visual C++, VB та ін., на основі ГІС-інструментарію, яка реалізовує математичні алгоритми та працює з даними ГІС [4, 11, 54, 123, 128]. Кожна нова модель, кожна нова ГІС – окремий підхід, окремі програми, додатковий час.

У разі ж використання спеціалізованих математичних обчислювальних пакетів для моделювання, їх вбудовані засоби візуалізації результатів обчислень значно поступаються можливостям ГІС-пакетів.

Отже, основною проблемою створення інформаційних систем оцінювання та прогнозування стану поверхневих вод за даними моніторингу є розширення аналітичних можливостей цих систем шляхом автоматизації інтегрування апарату математичних моделей у ГІС моніторингу поверхневих вод.

Існує чимало видів математичних моделей, які описують процеси у поверхневих водах та які варто ідентифікувати за даними моніторингу: алгебраїчні та диференціальні, лінійні та нелінійні, детерміновані та стохастичні, дискретні та неперервні тощо [55]. Зокрема, під час оцінювання та прогнозування стану поверхневих вод за даними моніторингу широко застосовуються математичні моделі процесів розбавлення та перемішування стічних вод з річковими, трансформації та поширення хімічних речовин, гідрологічних та гідравлічних процесів перенесення наносів тощо [5, 7, 20, 55, 92, 61]. Для автоматизації математичних операцій для цих моделей (ідентифікація та розв'язання рівнянь) використовуються спеціальні математичні пакети: Matlab, Maple, Mathcad, MS Excel тощо.

Зробимо огляд найбільш поширених в Україні математичних моделей, проаналізуємо найбільш поширені математичні пакети для оперування цими моделями, пакети прикладних програм для роботи з ГІС (ГІС-пакети) та функціонуючі в Україні інформаційні системи екологічного моніторингу загальнодержавного та міжрегіонального рівня, які можуть бути джерелом даних для ідентифікації математичних моделей стану поверхневих вод.

Одразу введемо обмеження на математичні моделі, які будуть розглядатись у даній роботі. Воно пов'язане з проблемою використання даних багатьох суб'єктів державної системи моніторингу, зокрема, з різною (часто – низькою) періодичністю та точністю даних спостережень. За таких умов більш поширеним є застосування детермінованих математичних моделей, які, фактично, описують зміни тренду стану поверхневих вод.

### **1.1.1. Огляд детермінованих математичних моделей зміни якості поверхневих вод**

Більшість математичних моделей екологічних процесів у поверхневих водах присвячені опису зміни якості вод [5, 6, 23, 47, 55, 53, 56, 77, 85, 86, 89, 100, 114, 151–164]. Якість води – це сукупність хімічних та біологічних складових, а також фізичних властивостей води, яка дозволяє визначати ступінь її забрудненості та придатності до конкретних видів водокористування та водоспоживання [23, 55, 89, 100, 114].

Зменшення значень хімічних показників може здійснюватись багатьма способами. Зменшення може відбуватись під час дії якогось

одного процесу, а може відбуватись і більш складно – внаслідок взаємодії багатьох процесів. Серед простих способів виділено такі:

- розбавлення та перемішування з більш чистими водами;
- осаджування та седиментація;
- поглинання речовин гідробіонтами;
- перехід газів з води річки в атмосферу;
- адсорбція хімічних речовин завислими речовинами.

Більшість відомих моделей за кількістю та характером процесів, які враховуються, можна розбити на три типи [55]:

- 1) моделі, що враховують лише процеси розбавлення вод;
- 2) моделі, що враховують процеси самоочищення річки, але без врахування процесів розбавлення;
- 3) моделі розбавлення з урахуванням процесів самоочищення.

1. Серед моделей першого типу найбільш поширеною є модель В. А. Фролова – І. Д. Родзиллера для консервативних речовин, тобто речовин, які не вступають в хімічні реакції [89, 112]

$$\frac{dx(t)}{dt} = -F(t) \cdot [x(t) - x^*], \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

де  $x^*$  – значення концентрації речовини у так званому створі повного змішування;  $F(t)$  – деяка нелінійна функція, вираз якої виведений В. А. Фроловим на основі аналізу розмірностей – характеризує зменшення концентрації  $x$  за рахунок процесів розбавлення.

Модель (1.1) може описувати зміну концентрації консервативної речовини як у часі  $x(t)$ , так і у просторі  $x(z)$ .

2. Математична модель В. І. Лаврика для опису процесів розбавлення у кінцевому створі ділянки (“камери”) річки

$$x = x^* + (u - x^*) e^{-\frac{1+K\tau}{\tau}}, \quad (1.2)$$

де  $K$  – коефіцієнт інтенсивності процесів самоочищення;  $\tau$  – час повного оновлення води на ділянці (у “камері”), який дорівнює

$$\tau = \frac{V}{Q_0 + q}, \quad (1.3)$$

де  $V$  – об’єм води у “камері”,  $Q_0$  – витрати води у річці до надходження до неї стічних вод.

3. Математичні моделі, основані на диференціальному рівнянні другого порядку в частинних похідних, в якому зміна значення  $x$  моделюється як в часі  $t$ , так і у просторі  $z$ . Прикладами таких математичних моделей є моделі В. М. Маккавєєва, А. В. Караушева, А. М. Айтсама, Х. А. Вельнера, Л. Л. Пааля, М. А. Бесценної, М. А. Руффель та інших. Наприклад, для однієї просторової координати  $z$  [24, 26, 55, 58-59]:

$$-\frac{\partial x(t, z)}{\partial t} = -\delta \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} + v \frac{\partial x(t, z)}{\partial z} \quad (1.4)$$

з початковими та граничними умовами:

$$x(0, z) = x_0(z), \quad x(t, 0) = a(t), \quad x(t, L) = b(t), \quad (1.5)$$

де  $\delta$  – коефіцієнт турбулентної дифузії;  $L$  – довжина ділянки річки, яка моделюється – визначається вздовж осі координат  $z$ ;  $x_0(z)$  – залежність значень  $x$  від координати  $z$  в межах ділянки моделювання в початковий момент часу;  $a(t)$  і  $b(t)$  – залежність значень  $x$  від часу  $t$  на вході ( $z = 0$ ) і на виході ( $z = L$ ) ділянки моделювання, відповідно.

Головним недоліком усіх математичних моделей першого типу є те, що вони можуть застосовуватися для опису динаміки концентрацій лише консервативних хімічних речовин, враховуючи тільки один фізичний основний фактор – фактор розбавлення (розповсюдження та перемішування).

Серед *математичних моделей другого типу* – моделей самоочищення річкової води, в яких не враховується природа процесів розбавлення в явному вигляді – найбільш поширеними є математичні моделі у вигляді диференціального рівняння першого порядку. Загалом, можна виділити такі види математичних моделей:

1. Прості лінійні математичні моделі, основані на звичайному диференціальному рівнянні першого порядку [44, 45, 55, 58]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Kx(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.6)$$

де  $K$  – коефіцієнт зменшення забруднюючої речовини за одиницю часу (часто його називають константою розпаду чи розкладення);  $x_0$  – значення  $x$  в початковий момент часу  $t = 0$ .

2. Нелінійні математичні моделі Моно та Міхаеліса–Ментен [44, 55, 56]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Psi_{\max} x}{\nu_1 + x}, \quad x(0) = x_0 \quad (1.7)$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Psi_{\max} \cdot x \cdot x_K}{\nu_2 \cdot x + \nu_3 \cdot x_K + x \cdot x_K}, \quad x(0) = x_0, \quad (1.8)$$

де  $x$  – концентрація у воді деякої хімічної речовини чи вміст бактерій або мікроорганізмів;  $x_K$  – концентрація розчиненого у воді річки кисню;  $\Psi_{\max}$  – максимальна швидкість розкладання забруднюючої речовини;  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – так звані константи напівнасичення для забруднюючих речовин;  $\nu_3$  – константа напівнасичення для розчиненого у річці кисню.

Математичні моделі (1.7), (1.8) враховують нелінійність динаміки річкових процесів за гранично низьких чи високих значень  $x$ . Математична модель (1.8) одночасно враховує ще й вплив концентрації розчиненого у воді кисню.

3. Балансові моделі [26, 55]. Прикладом балансових моделей є математичні моделі зміни концентрації розчиненого у воді кисню, зокрема математична модель Стрігера – Фелпса [26, 55]:

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x_{\text{нас}} - x) - a_2 x_{\text{ВСК}}, \quad (1.9)$$

де  $x$  – концентрація розчиненого у річковій воді кисню;  $x_{\text{нас}}$  – концентрація насичення для кисню у річковій воді;  $x_{\text{ВСК}}$  – значення біохімічного споживання кисню (характеризує концентрацію легкоокислювальних органічних речовин;  $a_1$  – стала швидкості реаерації для розчиненого у річковій воді кисню;  $a_2$  – константа розпаду першого порядку для легкоокислювальних органічних речовин.

4. Стехіометричні моделі – будуються по конкретних хімічних реакціях за законом дії мас Гульдберга – Вааге [55].

5. Моделі у вигляді систем диференціальних рівнянь, які описують поглинання та перетворення хімічних речовин різними мікроорганізмами з одночасною зміною біомаси останніх, наприклад моделі трофічного ланцюга та інші [26, 55].

6. Математична модель процесів послідовно-рівнобіжної трансформції речовин С. В. Єрмоєнка [19, 20].

7. Математична модель А. В. Караушева для розрахунку розбавлення стічних вод і розчинів у поверхневих водах на основі відомого диференціального рівняння турбулентної дифузії, яке в залежності від характеру потоку і особливостей поставленої задачі записується з тими чи іншими спрощеннями [33, 111]. Основні співвідношення, на яких базується дана математична модель, приведені у додатку А.

8. Узагальнені математичні моделі самоочисних процесів річкових вод.

*Просторово-одновимірна модель для малих та середніх річок.* У роботах [49–52, 55, 56, 59–60, 64–65] розроблена математична модель річкової розгалуженої системи як кібернетичної, що є підкласом багатозв'язних динамічних систем з розподіленими параметрами, на вході якої надходять промислові, сільськогосподарські та комунально-побутові стічні води, а також води природного поверхневого стоку чи підземного живлення з якістю  $u$ , які впливають на якість води  $x$  в річці. Вихідною характеристикою системи є якість води в місцях водокористування та водоспоживання, або якість води  $x_{\text{вих}}$  в кінцевому створі ділянки річки, що моделюється [55, 62, 64, 76].

Для полегшення врахування особливостей динаміки річкового потоку проведена декомпозиція ділянки річки, що моделюється, – вона розбивається на  $N$  елементарних ділянок (ЕД) за двома критеріями: на кожній ЕД не повинно бути більше одного входу з якістю  $u$ , а всі основні параметри річки повинні бути однаковими в межах заданого інтервалу (рис. 1.1).

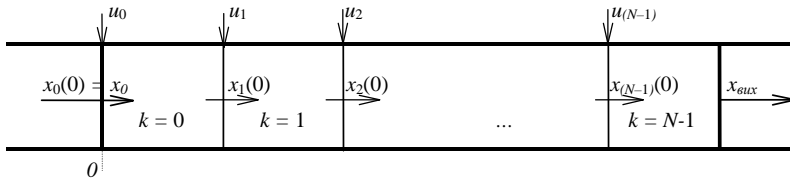


Рис. 1.1. Схема ділянки річки з розбиттям її на елементарні ділянки

Вхідними  $u(t)$ , вихідними  $x_{\text{вих}}(t)$  змінними та змінними стану  $x(t)$  є значення основних показників якості води, наприклад, концентрації забруднюючих речовин або вміст бактерій, які відповідають чотирьом вимогам: вони не є від'ємними; більші значення означають більше забруднення, менші – менше; значення не збільшуються з часом за відсутності природних чи антропогенних впливів; усталене значення прямує до нуля.



У роботі [55] запропоновано новий метод побудови просторово-одновимірних математичних моделей для моніторингу та управління якістю річкових вод та за цим методом побудовано узагальнену модель, яка дозволяє у кожному створі розрахувати значення показників якості води у найменш та найбільш забруднених частинах потоку річки (рис. 1.2).

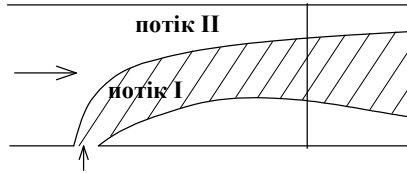


Рис. 1.2. Умовна схема змішування стічних вод з річковими (якщо більш забрудненими є води, що надходять до річки, тоді найбільш забрудненим потоком буде потік I, інакше – потік II)

Узагальнена математична модель має вигляд:

$$\begin{aligned}
 x_i(t) = & \left( \prod_{j=1}^i \frac{q_{w_j}}{Q_{j+1}} \right) \left( \prod_{j=1}^{i-1} \psi_j(T_j) \right) \chi_i(t) \left( \prod_{j=0}^{i-1} M_{jl}(K_j, T_j) \right) M_{il}(K_i, t) x(0) + \\
 & + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \left( \prod_{m=j}^i \frac{q_{w_m}}{Q_{m+1}} \right) \left( \prod_{m=j+1}^{i-1} \psi_m(T_m) \right) \psi_i(t) \theta_j(T_j) \left( \prod_{m=j}^{i-1} M_{ml}(K_m, T_m) \right) M_{il}(K_i, t) u_j \right) + \\
 & + \theta_i(t) \frac{q_{w_i}}{Q_{i+1}} M_{il}(K_i, t) u_i, \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

$$x_0(t) = x(0) M_{0l}(K_0, t), \quad t = [0, T_0], \quad (1.11)$$

$$\psi_i(t) = \begin{cases} \gamma_i(t), & u_i > x_i(0); \\ \chi_i(t), & u_i \leq x_i(0); \end{cases} \quad \theta_i(t) = \begin{cases} \varphi_i(t), & u_i > x_i(0); \\ \gamma_i(t), & u_i \leq x_i(0); \end{cases} \quad (1.12)$$

$$q_{wi} = \begin{cases} q_i, & u_i > x_i(0); \\ Q_i, & u_i \leq x_i(0); \end{cases} \quad q_{\bar{w}i} = \begin{cases} Q_i, & u_i > x_i(0); \\ q_i, & u_i \leq x_i(0). \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\gamma_i(t) = 1 - \mathfrak{F}_i(\Lambda_i, t), \quad \chi_i(t) = \frac{q_{\overline{w}_i}}{q_{w_i}} + \mathfrak{F}_i(\Lambda_i, t),$$

$$\varphi_i(t) = \frac{q_{w_i}}{q_{\overline{w}_i}} + \mathfrak{F}_i(\Lambda_i, t); \quad (1.14)$$

$$Q_{i+1} = q_{w_i} + q_{\overline{w}_i}, \quad q_0 = 0, \quad x_i(0) = x_{i-1}(T_{i-1}), \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.15)$$

де для  $i$ -ої ЕД:  $x_i(t)$  – значення показника якості води на виході ЕД в заданий момент часу  $t$ ;  $Q_i$  – витрати води в річці на вході ЕД;  $q_i$  – витрати стічних чи природних вод, що надходять до річки на  $i$ -й ЕД;  $T_i$  – час, необхідний на добігання річкової води від початкового до кінцевого створу ЕД [55, 62, 63];

-  $\mathfrak{F}_i(\Lambda_i, t)$  – функція, яка залежить від вибраної моделі опису процесів розбавлення у річці:

- для моделі В. А. Фролова – І. Д. Родзиллера [89, 112]:

$$\mathfrak{F}_i(\Lambda_i, t) = \exp(-\alpha_j \sqrt[3]{t}),$$

- для моделі В. І. Лаврика [45, 46]:

$$\mathfrak{F}_i(\Lambda_i, t) = \exp(-(1 + K_i V_i) / V_i);$$

-  $M_{il}(K_i, t)$  – функція, яка враховує вплив самоочисних процесів, що протікають у річці ( $K_i$  – вектор параметрів моделі):

- для математичної моделі груп послідовно-одночасних процесів зміни значень показника якості  $x$  води у річці за відсутності впливів  $u$ , яка за умови  $l = 1$  або  $2$  зводиться до багатьох відомих аналогічних математичних моделей, що дає підстави використовувати її у подальшому як більш загальну, оскільки вона охоплює і випадок  $l = 3$ , який не охоплюється іншими відомими моделями [55]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = G_l(t) x(t), \quad l = 1, 2, 3, \quad x(0) = x_0, \quad t = [0, T], \quad (1.16)$$

$$G_1(t) = -k_1, \quad G_2(t) = -k_2(1 - e^{-k_1 t}), \quad G_3(t) = -k_3 \left[ 1 - e^{-k_2(1 - e^{-k_1 t}) t} \right], \quad (1.17)$$

де  $G_l(t)$  – функція, яка враховує вплив  $l$ -ої ( $l = 1, 2$  чи  $3$ ) кількості груп послідовно-одночасних процесів на зміну значення показника  $x$ ;  $T$  – інтервал часу;  $k_1, k_2$  та  $k_3$  – коефіцієнти пропорційності між швидкістю протікання процесів відповідно першої, другої та третьої груп, за умови їх ізольованого протікання, та значенням показника, на який вони діють; розв’язок рівнянь цієї моделі у позначеннях рівняння (1.12) [55]:

$$M_{il}(K_i, t) = e^{-\mu_{il}(K_i, t)}, \quad \mu_{il}(K_i, t) = \begin{cases} -K_{i1} \cdot t, & l=1, \\ -\frac{K_{i2}}{K_{i1}} \cdot (e^{-K_{i1}t} + K_{i1}t - 1), & l=2, \\ -K_{i3} \cdot \left[ t - \int_0^t e^{-K_{i2} \cdot q(1-e^{-K_{i1}q})} dq \right], & l=3, \end{cases}$$

- для моделі В. І. Лаврика [44–45]:

$$M_{il}(K_i, t) = e^{\left( \gamma_{\max i} \left( m_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{m_i}} \right) - t \right) \right)}, \quad K_i = \begin{bmatrix} \gamma_{\max i} \\ m_i \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Враховувати у виразі (1.17) можна не тільки надходження вод до річки, а й водозабори з витратами  $q_{vi}$ :  $x_i(T_i) = x_i(0)$ ,  $Q_{i+1} = Q_i - q_{vi}$ .

Інваріантність розробленої моделі (1.11)–(1.16) до того, який потік є більш забрудненим (річковий чи той, що до нього надходить) та до моделей, які вибираються для опису річкових процесів самоочищення та розбавлення, обумовлює її перевагу у порівнянні з відомими моделями та практичну доцільність у використанні.

Інваріантність моделі (1.11)–(1.16) до природи та походження водного потоку (антропогенний скид чи природні води) дозволяє описувати процеси у розгалуженій річковій системі шляхом заміни цієї системи графовою моделлю, в якій вихід кожної притоки є додатковим входом річки, основної для цієї притоки.

*Просторово-двовимірна модель для малих та середніх річок.* У роботах [49, 50, 55, 56, 58, 59] запропоновано динамічну просторово-двовимірну математичну модель змін якості води малих та середніх річок на відносно прямих та широких ділянках, котра в аналітичному вигляді враховує особливості протікання річкових процесів по ширині потоку за положеннями теорії Л. Прандтля про те, що річкові процеси розбавлення мають різну природу по ширині потоку (рис. 1.3): в середині потоку знаходиться турбулентна зона, де пере-

важують процеси перемішування та турбулентної дифузії, а ближче до берега на досить прямих ділянках річок знаходиться гранична ламінарна зона, де вода тече окремими елементарними струмками, що не змішуються між собою.

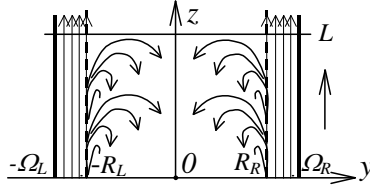


Рис. 1.3. Картина напрямків течії у річковому потоці за теорією Л. Прандтля

Математичні моделі процесів у лівій та правій ламінарних білябережних та турбулентних стреминних зонах зшиваються між собою шляхом узгодження граничних умов. Математична модель  $w$ -ої ( $w = 1$  для правої та  $w = 2$  для лівої зон деякої ЕД) ламінарної білябережної зони будується як розв'язок диференціального рівняння першого порядку в частинних похідних [55, 57]:

$$K_{tw}(y) \frac{\partial X_w^L(t, y, z)}{\partial z} = K_{zw}(y) \cdot \frac{\partial X_w^L(t, y, z)}{\partial t}, \quad X_w^L(0, y, 0) = X_{0w}(y), \quad (1.19)$$

$$X_w^L(0, y, L) = X_{Lw}(y), \quad z = [0, L], \quad t = [0, T], \quad y = [R_w, \Omega_w],$$

де  $X_w^L(t, y, z)$  – значення показника якості води річки, усереднене по глибині;  $X_{0w}(y)$  – значення показника якості води в початковий момент часу на початку ( $z = 0$ ) ламінарної зони;  $X_{Lw}(y)$  – значення показника якості води в початковий момент часу в кінці ( $z = L$ ) ламінарної зони;  $K_{tw}(y)$  та  $K_{zw}(y)$  – значення сумарних інтенсивностей біохімічних процесів очищення води, що діють протягом часу  $t$  та вздовж осі координат  $z$  відповідно, які можуть змінюватись вздовж осі координат  $y$ .

В результаті розв'язання даного рівняння методом Фур'є отримано модель [52]

$$X_w^L(t, y, z) = X_{0w}(y) \cdot e^{-[K_w^*(y)t + K_{zw}^*(y)z]},$$

$$t = [0, T], \quad z = [0, L], \quad y = [R_w, \Omega_w], \quad w = 1, 2, \quad (1.20)$$

$$R_1 = R_R, \quad \Omega_1 = \Omega_R, \quad R_2 = -R_L, \quad \Omega_2 = -\Omega_L,$$

$$K_{m^*}^*(y) = \frac{K_{zw}(y)}{LK_{m^*}(y)} \ln \left( \frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)} \right), \quad K_{zw^*}^*(y) = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)} \right). \quad (1.21)$$

Математична модель  $w$ -ої турбулентної стремнинної зони будуватиметься як розв'язок диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial X_w^T(t,y,z)}{\partial t} = \delta_w \frac{\partial^2 X_w^T(t,y,z)}{\partial y^2} - v_w \frac{\partial X_w^T(t,y,z)}{\partial z} - K_{zw} X_w^T(t,y,z), \quad (1.22)$$

де  $X_w^T(t,y,z)$  – показник якості води річки турбулентної зони, усереднений по глибині;  $\delta_w$  – коефіцієнт турбулентної дифузії;  $v_w$  – усереднена швидкість течії річки в напрямку осі координат  $z$ ;  $K_{zw}$  – коефіцієнт самоочищення річкової води під впливом біохімічних процесів, що діють в напрямку осі координат  $z$ .

Внаслідок принципу нерозривності водного потоку та потоку речовини в ньому, значення показника  $X_w^T(t,y,z)$  на границі турбулентної та ламінарної зон повинно бути однакове. Це дає дві граничні умови (для правої та лівої ламінарних зон, відповідно):

$$X_w^T(t,R_w,z) = X_{0w} \cdot e^{-[K_{lw}^*(R_w)t + K_{zw}^*(R_w)z]}, \quad t = [0, T], \quad z = [0, L], \quad w = 1, 2. \quad (1.23)$$

Отже, для турбулентної зони має місце задача з фіксованими лівою та правою границями і вільними нижньою та верхньою (див. рис. 1.4).

В результаті розв'язання рівняння (1.22), (1.23) методом Фур'є отримано модель [55, 57].

$$X^T(t,y,z) = \begin{cases} e^{-[K_{11}^*(R_1)t + K_{12}^*(R_1)z]} (C_{11} \cos \alpha_1 y + C_{12} \sin \alpha_1 y), & y = [0, R_1], \\ e^{-[K_{21}^*(R_2)t + K_{22}^*(R_2)z]} (C_{21} \cos \alpha_2 y + C_{22} \sin \alpha_2 y), & y = [0, R_2], \end{cases} \quad (1.24)$$

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-394-2>

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-394-2>

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-394-2>

*Наукове видання*

**Мокін Віталій Борисович,  
Крижановський Євгеній Миколайович,  
Боцула Мирослав Павлович**

**ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ІНТЕГРУВАННЯ  
МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ  
СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД**

Монографія

Редактор С. Малішевська  
Оригінал-макет підготовлено Є. Крижановським

Підписано до друку 25.01.11 р.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. др. арк. 8,78  
Наклад 100 прим. Зам № .2011-013

Вінницький національний технічний університет,  
КІВЦ ВНТУ,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-81-59  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.