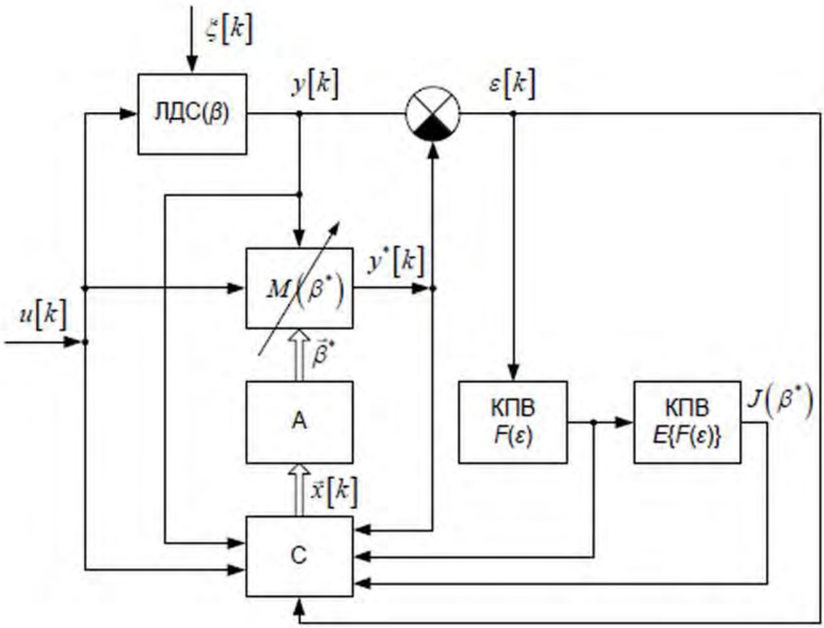
Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2010

УДК 519.7:63-83
ББК 32.816
М74

Рецензенти:
В. Я. Данилов, доктор технічних наук, професор (НТУУ «КПІ»)
А. М. Сільвестров, доктор технічних наук, професор (НТУУ «КПІ»)
С. В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор (ВНАУ)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» та «Електричні системи і комплекси транспортних засобів». Лист № 1/11-5570 від 23.06.2010 р.

Мокін, Б. І.
М74 Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 260 с.
ISBN 978-966-641-388-1

Навчальний посібник присвячено викладенню математичних методів ідентифікації динамічних систем, як лінійних, так і нелінійних, як безперервних, так і дискретних, як у часовому просторі, так і на комплексній площині, як в детермінованому, так і в стохастичному варіантах, як з урахуванням зосереджених, так і розподілених параметрів, але за умови, що ці параметри в часі не змінюються.

Посібник рекомендується для студентів, які поглиблено вивчають дисципліну «Теорія автоматичного управління».

УДК 519.7:63-83
ББК 32.816

ISBN 978-966-641-388-1

ЗМІСТ

«Задача идентификации систем, т. е. определение структуры и параметров систем по наблюдениям, является одной из основных задач современной теории и практики автоматического управления»

Я. З. Цыпкин

ВСТУП

У будь-яких об’єктах під дією внутрішніх і зовнішніх впливів з часом виникають зміни станів, які прийнято називати динамічними процесами. Складні об’єкти, в яких протікають динамічні процеси, відносять до класу динамічних систем. В одній і тій же динамічній системі можуть протікати одночасно кілька динамічних процесів, до того ж різного характеру, і за тим, який із цих процесів для нас є домінуючим, ми можемо відносити одну й ту ж динамічну систему до різних класів, найбільшими з яких є: клас безперервних систем, в яких процеси протікають у часі безперервно; клас дискретних систем, в яких процеси формуються лише в окремі моменти часу; клас детермінованих систем, в яких внутрішні і зовнішні впливи підпорядковані відомим однозначним залежностям; клас стохастичних систем, в яких внутрішні чи зовнішні впливи мають імовірнісний характер; клас лінійних систем, в яких реакція системи є пропорційною вхідному впливу; клас нелінійних систем, в яких реакція системи не є пропорційною вхідному впливу; клас систем з зосередженими параметрами, в яких реакція системи на зовнішній вплив є лише функцією часу, і клас систем з розподіленими параметрами, в яких реакція системи на зовнішній вплив є функцією не лише часу, а одночасно і однієї чи кількох просторових координат. Так, наприклад, за процесом споживання електричної енергії комп’ютер є безперервною динамічною системою, а за обробкою цифрової інформації — дискретною; резервуар з насосом для закачування рідини є лінійною динамічною системою за рівнем рідини в резервуарі, а цей же резервуар з компресором для закачування газу є нелінійною динамічною системою за тиском газу в резервуарі; електропривод компресора, який має зворотний зв'язок за тиском газу на початку трубопроводу і стабілізує цей тиск, є динамічною системою з зосередженими параметрами; а цей же електропривод компресора, який має зворотний зв'язок за тиском газу в кінці трубопроводу і стабілізує саме цей тиск, є динамічною системою з розподіленими параметрами; радіолокаційна станція за каналом реалізації обертання антен в горизонтальній і вертикальній площинах є системою детермінованою, а за каналом обробки сигналів, прийнятих антеною, є системою стохастичною. Очевидно, що перелік таких прикладів можна продовжувати і продовжувати.

При протіканні процесів в динамічних системах внаслідок взаємної невідповідності окремих або всіх характеристик основних елементів систем виникають втрати, які можуть досягати значень вихідного потоку.

Експериментальний пошук найкращих умов припасування елементів приводить до значних затрат коштів та часу, а у випадках великих потужностей і значних габаритів може не бути здійсненим взагалі.

Дуже часто динамічні системи мають у своїй структурі об'єкти з областями, забороненими для функціонування, оскільки в них виникають умови для їх руйнації внаслідок поломок або вибухів.

Визначення границь таких областей є окремою важливою проблемою, для розв'язання якої експериментальний спосіб є неприйнятним взагалі.

Ще більше 200 років тому назад вчені різних країн звернули увагу на те, що різноманітні фізичні процеси можуть бути адекватно описані функціональними, диференціальними або інтегральними рівняннями, що їх з часом почали називати математичними моделями цих процесів.

Оскільки для визначення найкращих умов припасування розв'язків рівнянь, котрі адекватно описують процеси у динамічних системах, часу, людських та матеріальних ресурсів треба набагато менше у порівнянні з експериментальним їх визначенням на самих системах, то це об'єктивно спричинило стрімкий злет зацікавленості у математиків та фізиків до проблем побудови математичних моделей таких процесів, особливо після створення методів синтезу систем управління і оптимізації цих процесів з застосуванням математичних моделей. Станом на сьогодні таких моделей і методів їх побудови розроблено надзвичайно багато, але вони «розкидані», в основному, по статтях наукових журналів і спеціалізованих монографіях, а тому є необхідність в написанні навчального посібника, в якому в концентрованому вигляді у зрозумілому для студентів інженерних спеціальностей викладі основні з цих методів і моделей були б представлені. Саме цю мету і переслідує задуманий і створений нами навчальний посібник: «Математичні методи ідентифікації динамічних систем».

Звичайно, в одному обмеженому за кількістю сторінок посібнику зібрати усі основні методи ідентифікації довільних динамічних систем неможливо, тому ми зосередили свою увагу лише на ідентифікації тих динамічних систем, параметри структури яких в часі не змінюються – такі системи називають стаціонарними. Особливості ж ідентифікації нестаціонарних динамічних систем ми розглянемо в іншому навчальному посібнику.

У першій частині даного посібника показано, як будувати математичні моделі безперервних та дискретних динамічних систем з зосередженими параметрами за умов, коли рівень завад та внутрішніх шумів у системах є суттєво нижчим від рівня основних процесів на всіх стадіях їх перетворення, що дає право відносити такі системи до класу детермінованих.

Але можна навести досить багато випадків, коли ця умова не виконується. Наприклад, режим роботи електропривода екскаватора ніяк не можна віднести до детермінованих, оскільки навіть досвідчений машиніст екскаватора не здатний однозначно спрогнозувати скільки ґрунту прихопить за цикл ківш його машини, особливо коли є небезпека наштовхнутись на міцне коріння від недовикорчованого пенька або зачепитись за підземний виступ скельного каменя.

Що ж стосується електроприводів міських водогінних станцій, то значення моментів навантаження на їх валах у довільний момент часу є випадковим принципово, оскільки ніхто не може наперед точно визначити скільки водовідбірних кранів, підключених до водоводу, буде у даний момент часу відкручено і на яку пропускну здатність.

Випадковими, очевидно, є і режими роботи дробарок природних рудних матеріалів.

Приклади можна наводити і далі, але мабуть і цього досить, аби дійти висновку, що для практичного аналізу є актуальними задачі побудови математичних моделей динамічних процесів, що їх відносять до класу стохастичних, головною особливістю яких є, як відомо, випадковість значень параметрів їх режимів у кожний момент часу.

Розгляду математичних методів ідентифікації стохастичних динамічних систем із зосередженими параметрами присвячена друга частина посібника.

Часто ефективне функціонування динамічних систем досягається лише на нелінійних ділянках характеристик перетворення енергії, а тому виникає необхідність у синтезі математичних моделей цих систем з врахуванням нелінійності характеристик елементів, одним із найпоширеніших класів яких є релейні.

Дуже важливо також при математичному моделюванні динамічних систем вміти враховувати запізнення проходження сигналів через елементи з розподіленими у просторі параметрами.

Розгляду математичних методів ідентифікації нелінійних динамічних систем та динамічних систем з розподіленими параметрами присвячена третя частина цього навчального посібника.

На завершення вступу відзначимо, що ідентифікацією при побудові математичних моделей динамічних систем одні фахівці називають визначення числових значень коефіцієнтів синтезованих моделей, а інші — весь процес побудови математичної моделі: від вибору типу і форми залежності між вхідною і вихідною величинами — до визначення числових значень її коефіцієнтів.

Ми будемо використовувати термін «ідентифікація» в найбільш широкому його значенні, вважаючи тотожними словосполучення "синтез математичної моделі, ідентичної характеристикам системи, що моделюється" та "ідентифікація системи". Одночасно нагадаємо, що процес ідентифікації динамічної системи містить у собі три складових, першою з яких є вибір відповідної математичної залежності, що пов'язує між собою параметри системи та параметри її режиму, тобто, вибір структури математичної моделі системи; другою складовою є вибір критерію, мінімізацією якого досягається визначення оптимальних значень параметрів математичної моделі; а третьою складовою є вибір алгоритму пошуку значень параметрів математичної моделі, оптимальних за вибраним критерієм.

Пам'ятаючи про те, що математичні моделі для оцінювання стану, управління і прогнозу — це моделі, різні за своєю структурою та множиною вхідних змінних, ми будемо розкривати ці відмінності у міру викладу матеріалу, не роблячи окремих узагальнень за цією ознакою.

Оскільки при написанні посібника використані лише відомі та опубліковані результати, то, навівши список літератури, з якої взяті ці результати, ми при викладенні конкретного матеріалу, наслідуючи мудрого Я. З. Ципкіна, не будемо робити посилань на те, звідки що взято, — це буде стимулювати студентів до ознайомлення з усіма першоджерелами.

Даний навчальний посібник створено на основі узагальнення на динамічні процеси будь-якої природи уже апробованого в студентській аудиторії навчального посібника з ідентифікації електромеханічних процесів, котрий було розраховано лише на майбутніх інженерів-електромеханіків.

ЧАСТИНА І
ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У цій частині навчального посібника охарактеризуємо і покажемо як побудувати математичні моделі детермінованих лінійних динамічних систем з зосередженими параметрами (ЛДС ЗП) як безперервних, так і дискретних в часовій та частотній областях, а також на комплексній площині.

Розділ 1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БЕЗПЕРЕРВНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1 Математичні моделі безперервних детермінованих ЛДС ЗП у часовому просторі

Як було зазначено у вступі до посібника, для того, щоб динамічна система мала зосереджені параметри, її структура не повинна мати елементів, проходження сигналів у яких характеризується помітним запізненням.

Щоб динамічна система відносилась до безперервних, сигнали в її елементах повинні бути визначеними в кожний момент часу.

Щоб динамічна система була лінійною, вона повинна забезпечувати пропорційність між значеннями вхідних сигналів та реакціями системи на них.

Щоб динамічну систему можна було вважати детермінованою, достатньо забезпечити в ній суттєво менший рівень збурень у порівнянні із рівнем основних функціональних сигналів.

1.1.1 Диференціальні рівняння як математичні моделі безперервних детермінованих ЛДС ЗП у часовому просторі

Ще з шкільного курсу фізики нам відомо, що напруга $U(t)$, яка прикладається до котушки з індуктивністю L та внутрішнім опором r (рис. 1.1), урівноважується сумою падіння напруги $r \cdot I(t)$, обумовленого протіканням струму $I(t)$ по внутрішньому опору r, та електрорушійною силою самоіндукції $L\frac{dI(t)}{dt}$, тобто має місце рівність

$$L\frac{dI(t)}{dt} + r \cdot I(t) = U(t), \tag{1.1}$$

яка являє собою диференціальне рівняння 1-го порядку, оскільки одна із змінних, які воно зв'язує між собою, входить в нього разом зі своєю похідною.

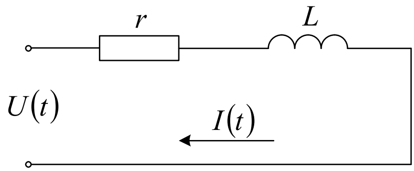


Рисунок 1.1 — Електрична схема підключення котушки індуктивності під напругу

Якщо котушку індуктивності розглядати як динамічну систему (ДС), на вхід якої надходить сигнал $U(t)$, котрий викликає у ній реакцію у вигляді $I(t)$ (рис. 1.2), то диференціальне рівняння (1.1) буде відігравати роль математичної моделі цієї системи, оскільки його розв'язок $I(t) = f(U,t)$ однозначно віддзеркалюватиме процес зміни в часі її реакції на даний вхідний сигнал.

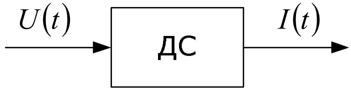


Рисунок 1.2 — Структурна схема котушки індуктивності як динамічної системи

А тепер подамо ту ж саму напругу $U(t)$ на послідовне з’єднання тієї ж самої котушки індуктивності з конденсатором ємністю C (рис. 1.3), напруга на якому, як відомо з курсу фізики, дорівнює $\frac{1}{C}\int I(t)dt$.

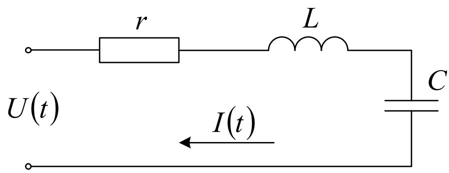


Рисунок 1.3 — Електрична схема підключення під напругу послідовного з’єднання котушки індуктивності та конденсатора

У цьому випадку прикладена до послідовного з’єднання котушки індуктивності та конденсатора напруга буде врівноважуватись сумою падіння напруги, обумовленого протіканням струму по внутрішньому опору котушки, електрорушійної сили самоіндукції котушки і напруги на конденсаторі, тобто матиме місце рівність

$$L\frac{dI(t)}{dt}+r\cdot I(t)+\frac{1}{C}\int I(t)dt=U(t), \qquad (1.2)$$

яка являє собою інтегро-диференціальне рівняння, оскільки одна із змінних, які воно зв’язує, входить в нього не лише зі своєю похідною, а й зі своїм інтегралом.

Для того, щоб рівняння (1.2) перетворити в чисто диференціальне, продиференціюємо обидві його частини. В результаті цього диференціювання з урахуванням того, що похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, отримаємо рівність

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+r\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dU}{dt}, \qquad (1.3)$$

яка являє собою диференціальне рівняння 2-го порядку, оскільки одна із змінних, які воно зв’язує, входить в нього не лише зі своєю першою, а й зі своєю другою похідною, що має найвищий порядок у цьому рівнянні, а тому і визначає порядок рівняння.

На підставі міркувань, аналогічних наведеним вище, під час розгляду котушки індуктивності як динамічної системи, в разі розгляду послідовного з'єднання котушки індуктивності та конденсатора як динамічної системи з вхідним сигналом $U(t)$ та реакцією на нього $I(t)$ (рис. 1.2), можна стверджувати, що диференціальне рівняння (1.3) відіграє роль математичної моделі цієї динамічної системи.

Звертаємо увагу на те, що коли система мала у своїй структурі лише один елемент (котушку індуктивності), здатний запасати на якийсь час енергію (індуктивну), то для моделювання процесу зміни станів у ній достатньо було диференціального рівняння 1-го порядку, а коли у структурі системи з'явився ще й другий елемент (конденсатор), здатний запасати на якийсь час енергію (ємнісну), то для моделювання зміни станів у ній уже знадобилось диференціальне рівняння 2-го порядку.

Легко показати, користуючись лише знаннями розділу «Механіка» шкільного курсу фізики, що аналогічна ситуація матиме місце і в динамічних системах з двома елементами, здатними запасати на якийсь час кінетичну та потенціальну енергію.

А у зв'язку з тим, що структура довільної ЛДС ЗП з вхідним сигналом $x(t)$ і реакцією на нього $y(t)$ може мати n елементів, здатних запасати на якийсь час якийсь вид енергії, то адекватно моделювати зміни станів у ній можна лише за допомогою диференціального рівняння n-го порядку

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{d^l x}{dt^l}, \tag{1.4}$$

для якого виконується умова

$$m \le n, \tag{1.5}$$

що обумовлена здатністю системи фізично реалізуватись під таку модель.

Для отримання розв’язку диференціального рівняння 1-го порядку (1.1) це рівняння необхідно один раз проінтегрувати. В результаті цього інтегрування в розв’язку з’явиться стала інтегрування, для конкретизації якої необхідно задати початкову умову для вихідної координати $I(t)$, тобто задати умову

$$I(t)\big|_{t=0} = I(0). \tag{1.6}$$

Це означає, що з множини траєкторій руху, які задаються загальним розв’язком диференціального рівняння 1-го порядку, потрібно вибрати ту, яка в початковий момент часу $(t=0)$ проходить через точку $I(0)$.

З фізичної точки зору це означає, що, моделюючи процес зміни струму $I(t)$ в котушці індуктивності після подачі на її затискачі напруги $U(t)$, потрібно врахувати в момент подачі напруги той залишковий струм, який мав місце у цій котушці індуктивності у цей момент в результаті її звільнення від енергії, привнесеної попереднім вхідним сигналом.

Оскільки для отримання розв’язку диференціального рівняння 2-го порядку його необхідно проінтегрувати двічі, що викликає появу одна за одною двох сталих інтегрування, то для їх конкретизації уже потрібно знати в початковий момент часу $(t=0)$ не лише значення вихідної координати $I(t)$, але і значення її першої похідної $\frac{dI}{dt}$, тобто початкова умова для рівняння (1.3) набуває вигляду

$$\left.\begin{aligned} I(t)\big|_{t=0} &= I(0), \\ \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} &= I^1(0). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Цілком очевидно, що для отримання розв’язку диференціального рівняння n-*го* порядку його необхідно проінтегрувати n раз, що викликає появу n сталих інтегрування, для конкретизації яких потрібно знати в початковий момент часу не лише значення вихідної координати $y(t)$, але і значення у цей початковий момент усіх її похідних до $(n-1)$ порядку включно, тобто початкова умова для рівняння (1.4) має вигляд

$$\left.\begin{aligned} &y(t)\big|_{t=0} = y(0), \\ &\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y^1(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = y^{n-1}(0). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Слід відзначити, що для значної кількості ЛДС ЗП характерним є те, що всі елементи їхніх структур, які здатні запасати енергію, після відключення системи цю енергію втрачають, що дає підставу перед новим включенням у роботу системи для її моделі у вигляді (1.4) вважати початкові умови нульовими, тобто в системі рівнянь (1.8) вважати усі праві частини такими, що дорівнюють нулю. Це суттєво спрощує подальший процес моделювання.

1.1.2 Перехідна та імпульсна перехідна характеристики безперервних детермінованих ЛДС ЗП

Серед математичних моделей лінійних динамічних систем широке застосування знаходять дві їх характеристики в часовій області, які називають перехідною характеристикою $h(t)$ та імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$.

Перехідна характеристика $h(t)$ системи є її реакцією на вхідний сигнал $x(t)$ у вигляді одиничного стрибка. Тобто у випадку, коли

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

маємо:

$$y(t) = h(t). \tag{1.10}$$

Графічна інтерпретація цього означення показана на рис. 1.4.

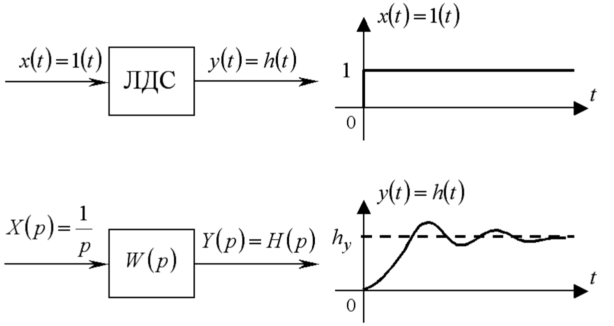


Рисунок 1.4 — Графік реакції $h(t)$ лінійної динамічної системи ЛДС на одиничний стрибок $1(t)$

Імпульсна перехідна або *вагова характеристика* $g(t)$ системи є її реакцією на одиничний імпульсний вхідний сигнал $x(t)$ у вигляді дельта-функції $\delta(t)$, для якої справедливо:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{1.12}$$

Із виразів (1.11), (1.12) випливає, що дельта-функція — це ідеалізація імпульсу одиничної площі з надзвичайно великою висотою і надзвичайно малою протяжністю (рис. 1.5).

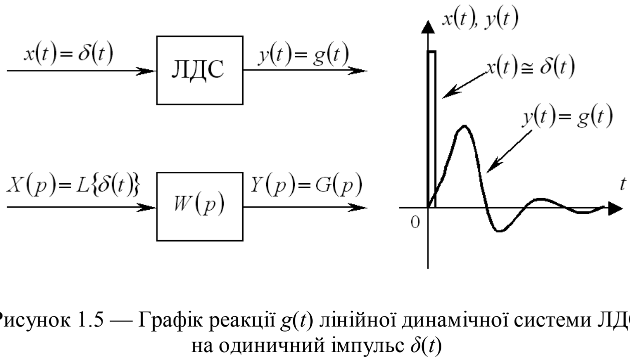


Рисунок 1.5 — Графік реакції $g(t)$ лінійної динамічної системи ЛДС на одиничний імпульс $\delta(t)$

Дуже важливим є те, що сигнал $x(t)$, який діє на вході лінійної динамічної системи з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$ (рис. 1.6), та реакція системи $y(t)$ на цей сигнал пов’язані між собою інтегралом згортки

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\,, \tag{1.13}$$

який має надзвичайно прозорий зміст — вихідний сигнал динамічної системи формується сумою реакцій на кожний імпульс вхідного сигналу під час подання цього вхідного сигналу у вигляді послідовності імпульсів з висотою, що дорівнює значенню вхідного сигналу у відповідний момент часу.

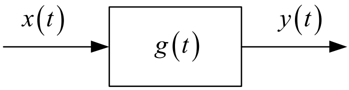


Рисунок 1.6 — Узагальнена структурна схема лінійної динамічної системи

1.2 Математичні моделі безперервних детермінованих ЛДС ЗП на комплексній площині

З курсу операційного числення, що є одним з обов’язкових розділів загального курсу вищої математики, який викладається студентам технічних вузів, відомо, що за допомогою оператора Лапласа

$$L\{f(t)\}=F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{1.14}$$

кожній функції f часу t, яка задовольняє умову $f(t)=0$ при $t<0$, умови Діріхле і називається *оригіналом*, можна поставити у відповідність функцію F комплексної змінної p, яка називається *зображенням* оригіналу на комплексній площині. Ця відповідність записується у такий спосіб:

$$f(t)\underset{\cdot}{\Leftrightarrow}F(p). \tag{1.15}$$

Наприклад, часовій функції одиничного стрибка (1.9) на комплексній площині відповідає зображення

$$F(p)=\int_{0}^{\infty}1(t)e^{-pt}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{-p}\cdot e^{-pt}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{p}, \tag{1.16}$$

або

$$1(t)\dot{\Leftrightarrow}\frac{1}{p}. \tag{1.17}$$

Ще один приклад — експоненті $e^{-\alpha t}$ при $t\geq 0$ на комплексній площині відповідає зображення

$$F(p)=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-pt}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(p+\alpha)t}dt=\frac{1}{-(p+\alpha)}e^{-(p+\alpha)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{p+\alpha} \tag{1.18}$$

або

$$e^{-\alpha t}\dot{\Leftrightarrow}\frac{1}{p+\alpha}. \tag{1.19}$$

Головною перевагою аналізу в області зображень $F(p)$, тобто на комплексній площині, у порівнянні з аналізом в області оригіналів $f(t)$, тобто у часовому просторі, є те, що за нульових початкових умов операції диференціювання $\frac{d}{dt}$ оригіналу $f(t)$ у часовому просторі відповідає операція перемноження на комплексну змінну p його зображення $F(p)$ на комплексній площині, тобто

$$\frac{df}{dt}=\dot{f}(t)\dot{\Leftrightarrow}p\cdot F(p). \tag{1.20}$$

Як наслідок цієї властивості маємо:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\ddot{f}(t)\dot{\Leftrightarrow}p^2\cdot F(p) \tag{1.21}$$

та

$$\frac{d^n f}{dt^n}=f^{(n)}(t)\dot{\Leftrightarrow}p^n\cdot F(p), \tag{1.22}$$

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-388-1

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-388-1

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-388-1

Навчальне видання

Мокін Борис Іванович
Мокін Віталій Борисович
Мокін Олександр Борисович

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено О. Мокіним

Підписано до друку 08.12.2010 р.
Формат 29.7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 16.4
Наклад 300 прим. Зам. № 2010-191

Вінницький національний технічний університет,
науково-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.